TD n°3 : moindres carrés

Soit A une matrice $m \times n$. On cherche à résoudre "au mieux" le système linéaire

$$Ax = b,\ x \in \mathbb{R}^n,\ b \in \mathbb{R}^m, \tag{1}$$

où $n \neq m$ ou quand $n = m$, mais avec A non inversible.

On note

$$||y|| = \left(\sum_{i=1}^{n} y_i^2 \right)^{1/2}$$

la norme euclidienne de y sur $\mathbb{R}^n$.

Partie 1 : Soit $J(x) = ||Ax - b||^2$ pour tout $x \in \mathbb{R}^n$.

1.1. Montrer que le problème d'optimisation

$$\text{Trouver } x \in \mathbb{R}^n \text{ tel que } J(x) = \min_{y \in \mathbb{R}^n} J(y) \tag{2}$$

a au moins une solution. On note X_b l'ensemble des solutions de (2).

1.2. Montrer que (2) est équivalent à :

$$\text{Trouver } x \in \mathbb{R}^n \text{ tel que } {}^tAAx =^t Ab. \tag{3}$$

1.3. Discuter de l'existence et unicité de la solution de (3) en fonction du rang de A.

1.4. Montrer que le problème de minimisation :

$$\text{Trouver } x \in X_b \text{ tel que } ||x||^2 = \min_{y \in X_b} ||y||^2 \tag{4}$$

a une unique solution $\overline{x}$ qu'on appelle pseudo-solution de (1).

1.5. Montrer que $\overline{x}$ est caractérisé par $\overline{x} \in X_b \cap (\mathrm{Ker}^t AA)^{\perp}$.

Partie 2 : Soit $\varepsilon > 0$, on note $J_\varepsilon(x) = ||Ax - b||^2 + \varepsilon ||x||^2$ pour tout $x \in \mathbb{R}^n$.

On considère le problème :

$$\text{Trouver } x \in \mathbb{R}^n \text{ tel que } J_\varepsilon(x) = \min_{y \in \mathbb{R}^n} J_\varepsilon(y). \tag{5}$$

2.1. Montrer que (5) a une unique solution x_ε.

2.2. Montrer que pour tout $y \in X_b$, $||x_\varepsilon|| \leq ||y||$.

2.3. Exprimer x_ε en fonction de A, b et ε.

2.4. En déduire que x_ε converge vers $\overline{x}$ solution de (4) quand $\varepsilon \to 0$.

Partie 3 : Soit $\varepsilon > 0$, on note $\overline{J_\varepsilon}(x) = \dfrac{1}{\varepsilon}||^t AAx -^t Ab||^2 + ||x||^2$ pour tout $x \in \mathbb{R}^n$.

On considère le problème :

$$\text{Trouver } x \in \mathbb{R}^n \text{ tel que } \overline{J_\varepsilon}(x) = \min_{y \in \mathbb{R}^n} \overline{J_\varepsilon}(y). \tag{6}$$

3.1. Montrer que (6) a une unique solution $\overline{x_\varepsilon}$.

3.2. Exprimer $\overline{x_\varepsilon}$ en fonction de A, b et ε.

3.3. En déduire que $\overline{x_\varepsilon}$ converge vers $\overline{x}$ solution de (4) quand $\varepsilon \to 0$.