TD n°5 : minimisation sous contraintes d'(in)égalité

Exercice 1 :

On considère le problème de minimisation suivant, sur $\mathbb{R}^2$:

$$\inf f_a(x_1, x_2) = x_1^2 + ax_2^2 + x_1x_2 + x_1 \text{ sous la contrainte } x_1 + x_2 - 1 \leq 0. \tag{1}$$

1.1. Pour quelles valeurs de $a \in \mathbb{R}$ la fonction f_a est-elle convexe ?

1.2. Pour ces valeurs de a, peut-on appliquer le théorème de Kuhn-Tucker ? Si oui, écrire les relations de Kuhn-Tucker.

1.3. Résoudre le problème (1) pour ces valeurs de a.

Exercice 2 :

Soit C le sous-ensemble de $\mathbb{R}^2$ défini par $C = \{(x, y)/x+y \leq 1,\ x \geq 0,\ y \geq 0\}$, et f la fonction de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ définie par $f(x, y) = -x - 2y - xy + x^2 + y^2$.

2.1. f est-elle convexe ? concave ?

2.2. C est-il ouvert ? fermé ? convexe ? est-ce un sous-espace affine ?

2.3. On veut minimiser f sur C. Montrer que chaque minimum (y compris les min locaux) sont situés sur la frontière de C.

2.4. Déterminer les minima de f sur C (avec l'aide de Kuhn-Tucker, ou directement en utilisant la question 2.3).

Exercice 3 :

On considère le problème suivant :

$$\min \frac{1}{2}(x_1-1)^2+\frac{1}{2}(x_2-2)^2 \text{ sous les contraintes } x_1-x_2 = 1,\ x_1+x_2 \leq 2,\ x_1 \geq 0 \text{ et } x_2 \geq 0. \tag{2}$$

3.1. Montrer que le problème (2) admet une unique solution.

3.2. Résoudre le problème (2) à l'aide des multiplicateurs de Lagrange.