**MAM4-SI4 - Optimisation** **2010-2011**

# TD n°6 : Dualité

---

Soit $Q$ une matrice symétrique définie positive ($N \times N$), et $c$ un vecteur de $\mathbb{R}^N$.
On définit la fonctionnelle $J$ de $\mathbb{R}^N$ dans $\mathbb{R}$ :

$$J(v) = \frac{1}{2}(Qv, v) - (c, v)$$

où $v \in \mathbb{R}^N$ et $( \, , \, )$ représente le produit scalaire usuel de $\mathbb{R}^N$.

Soit $A$ une matrice ($M \times N$) et $b$ un vecteur de $\mathbb{R}^M$ appartenant à $ImA$. On définit l'ensemble $K$ :

$$K = \{v \in \mathbb{R}^N \ tel\ que\ Av = b\}$$

et on considère le problème d'optimisation ($\mathcal{P}$) : trouver $u \in K$ tel que

$$J(u) = \inf_{v \in K} J(v)$$

1) Montrer que ($\mathcal{P}$) a une solution unique $u$.

2) On introduit le Lagrangien $\mathcal{L}$, défini par

$$\mathcal{L}(v, q) = J(v) + (q, Av - b)$$

où $v \in \mathbb{R}^N$ et $q \in \mathbb{R}^M$.

Montrer que $(u, p)$ est un point-selle de $\mathcal{L}$ sur $\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^M$ si et seulement si :

$$Au = b, \ \ Qu + A^T p = c.$$

3) Afin de démontrer l'existence du point-selle $(u, p)$, on remplace la contrainte $Av = b$ par :

$$\left\{ \begin{array}{l} Av - b \leq 0 \\ b - Av \leq 0 \end{array} \right.$$

Définir le Lagrangien associé à la minimisation de $J$ sous les 2 contraintes d'inégalité, et justifier l'existence d'un point-selle de ce Lagrangien. Ecrire les relations de Kuhn-Tucker, et en déduire l'existence d'un point-selle $(u, p)$ du Lagrangien $\mathcal{L}$ défini à la question 2.