



Available online at www.sciencedirect.com



C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 340 (2005) 873–878



<http://france.elsevier.com/direct/CRASSI/>

Ordinary Differential Equations

Back and forth nudging algorithm for data assimilation problems

Didier Auroux ^a, Jacques Blum ^b

^a *Laboratoire MIP, université Paul-Sabatier Toulouse 3, 118, route de Narbonne, 31062 Toulouse cedex 4, France*

^b *Laboratoire J.A. Dieudonné, université de Nice Sophia-Antipolis, Parc Valrose, 06108 Nice cedex 2, France*

Received 14 April 2005; accepted 10 May 2005

Available online 14 June 2005

Presented by Alain Bensoussan

Abstract

In this Note, we introduce a new algorithm for data assimilation problems, called the *back and forth nudging* (BFN) algorithm. The standard forward nudging algorithm is first studied for a linear ODE model. The backward nudging algorithm is then introduced in order to reconstruct the initial state of the system. These two algorithms are combined in the new BFN algorithm. The mathematical proof of its convergence is given for a linear ODE system. *To cite this article: D. Auroux, J. Blum, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 340 (2005).*

© 2005 Académie des sciences. Published by Elsevier SAS. All rights reserved.

Résumé

Nudging direct et rétrograde pour l'assimilation de données. Dans cette Note, nous introduisons un nouvel algorithme pour les problèmes d'assimilation de données, l'algorithme du nudging direct et rétrograde (*back and forth nudging* ou BFN en anglais). Nous rappelons tout d'abord la méthode du nudging appliquée à un système d'EDO linéaires, avant d'introduire le nudging sur le problème rétrograde en temps afin de reconstruire la condition initiale du système. En combinant ces deux méthodes, on obtient le nouvel algorithme BFN. Nous montrons la convergence de cet algorithme pour un système d'EDO linéaires. *Pour citer cet article : D. Auroux, J. Blum, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 340 (2005).*

© 2005 Académie des sciences. Published by Elsevier SAS. All rights reserved.

Version française abrégée

Introduction. L'assimilation de données, en météorologie comme en océanographie, consiste souvent à identifier l'état initial du système dynamique à partir d'observations. L'algorithme standard du nudging consiste à ajouter aux équations d'état du système un terme de rappel, proportionnel entre les observations et la quantité correspondante

E-mail addresses: auroux@mip.ups-tlse.fr (D. Auroux), jblum@math.unice.fr (J. Blum).

1631-073X/\$ – see front matter © 2005 Académie des sciences. Published by Elsevier SAS. All rights reserved.

doi:10.1016/j.crma.2005.05.006

calculée par la résolution du système des équations d'état. Le modèle apparaît alors comme une contrainte faible et le terme de rappel force les variables du modèle à coller avec les observations.

Initialement apparu en météorologie [2], le nudging (encore appelé relaxation newtonienne) a ensuite été utilisé avec succès en océanographie sur un modèle quasi-géostrophique [5] et sur des modèles méso-échelle de l'atmosphère [4]. Les coefficients du nudging peuvent être choisis de façon optimale en utilisant une méthode variationnelle [3,6].

Le nudging rétrograde consiste à résoudre les équations d'état du modèle de façon rétrograde en temps, en partant d'une observation de l'état du système à l'instant final. Un terme de rappel, avec un signe opposé à celui introduit dans le nudging direct, est ajouté aux équations du système, et l'état obtenu à l'instant final est en fait l'état initial du système [1].

L'algorithme BFN que nous introduisons ici consiste à résoudre d'abord les équations directes du modèle avec le terme de nudging, puis en repartant de l'état final ainsi obtenu, à résoudre les mêmes équations de façon rétrograde avec un terme de rappel opposé à celui du nudging direct. On obtient ainsi à la fin de la résolution rétrograde une première estimation de l'état initial. Ce procédé est alors répété de façon itérative jusqu'à la convergence de l'état initial. Cet algorithme peut être comparé au 4D-VAR, qui consiste aussi en une succession de résolutions de systèmes direct et rétrograde. Mais dans l'algorithme BFN, il est inutile, même pour des problèmes non linéaires, de linéariser le modèle comme dans le 4D-VAR, et le système rétrograde n'est pas l'équation adjointe mais le système des équations du modèle avec un terme de rappel qui en fait un problème bien posé.

Nudging direct. Considérons un système d'équations différentielles linéaires de la forme

$$\frac{dX}{dt} = AX, \quad 0 < t < T, \quad \text{avec} \quad X(0) = x_0.$$

Supposons que nous disposons d'observations $X_{\text{obs}}(t)$ de l'état du système $X(t)$. Le nudging direct consiste à rajouter un terme de rappel dans le modèle :

$$\frac{dX}{dt} = AX + K(X_{\text{obs}} - X), \quad 0 < t < T, \quad \text{et} \quad X(0) = x_0,$$

où K désigne la matrice de nudging. On obtient facilement le résultat suivant :

$$X(t) = e^{-(K-A)t} \int_0^t e^{(K-A)s} K X_{\text{obs}}(s) ds + e^{-(K-A)t} x_0,$$

et si K est symétrique définie positive, si la fonction X_{obs} est continue au voisinage de t , alors

$$\forall t \in]0, T], \quad X(t) \xrightarrow{K \rightarrow +\infty} X_{\text{obs}}(t).$$

Nudging rétrograde. En remplaçant la condition initiale par une condition finale, on obtient le système rétrograde suivant :

$$\frac{d\tilde{X}}{dt} = A\tilde{X}, \quad T > t > 0, \quad \text{avec} \quad \tilde{X}(T) = \tilde{x}_T.$$

En appliquant la méthode du nudging à ce système rétrograde (avec un signe opposé de sorte que le problème soit bien posé), on obtient

$$\frac{d\tilde{X}}{dt} = A\tilde{X} - K(X_{\text{obs}} - \tilde{X}), \quad T > t > 0, \quad \text{et} \quad \tilde{X}(T) = \tilde{x}_T.$$

On obtient également la convergence de $\tilde{X}(t)$ vers $X_{\text{obs}}(t)$ quand K tend vers l'infini, sous les mêmes hypothèses que pour le nudging direct.

Algorithm BFN. En combinant les deux précédents algorithmes dans un processus itératif d’allers-retours entre l’instant initial et l’instant final, on obtient l’algorithme BFN :

$$\begin{cases} \frac{dX_k}{dt} = AX_k + K(X_{\text{obs}} - X_k), \\ X_k(0) = \tilde{X}_{k-1}(0), \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{d\tilde{X}_k}{dt} = A\tilde{X}_k - K(X_{\text{obs}} - \tilde{X}_k), \\ \tilde{X}_k(T) = X_k(T), \end{cases}$$

avec la convention $\tilde{X}_{-1}(0) = x_0$. On montre facilement que si $n \geq 1$ et $T > 0$,

$$X_n(0) = (I - e^{-2KT})^{-1} (I - e^{-2nKT}) \int_0^T (e^{-(K+A)s} + e^{-2KT} e^{(K-A)s}) K X_{\text{obs}}(s) ds + e^{-2nKT} x_0$$

et si $n \rightarrow +\infty$, la suite $X_n(0)$ converge, et on en déduit la convergence pour tout $t \in [0, T]$:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} X_n(0) = X_\infty(0) = (I - e^{-2KT})^{-1} \int_0^T (e^{-(K+A)s} + e^{-2KT} e^{(K-A)s}) K X_{\text{obs}}(s) ds.$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} X_n(t) = X_\infty(t) = e^{-(K-A)t} \int_0^t e^{(K-A)s} K X_{\text{obs}}(s) ds + e^{-(K-A)t} X_\infty(0).$$

Des résultats analogues peuvent être obtenus pour les trajectoires rétrogrades $\tilde{X}_n(t)$. Ceci montre la convergence de l’algorithme BFN. On peut remarquer que la trajectoire limite $X_\infty(t)$ est totalement indépendante de la condition initiale x_0 de l’algorithme.

La trajectoire limite $X_\infty(t)$ conserve le même comportement asymptotique quand K tend vers l’infini que dans le cas du simple nudging direct, avec en plus la convergence en $t = 0$:

$$X_\infty(t) \xrightarrow{K \rightarrow +\infty} X_{\text{obs}}(t), \quad \forall t \in [0, T].$$

Conclusion. Nous avons prouvé la convergence de l’algorithme BFN dans le cadre d’un problème linéaire. Son principal intérêt (notamment par rapport au 4D-VAR) est qu’il ne nécessite ni problème adjoint, ni algorithme de minimisation.

1. Introduction

The standard nudging algorithm consists in adding to the state equations of a dynamical system a feedback term, which is proportional to the difference between the observation and its equivalent quantity computed by the resolution of the state equations. The model appears then as a weak constraint, and the nudging term forces the state variables to fit as well as possible to the observations.

First used in meteorology [2], the nudging method (also called Newtonian relaxation) has been used with success in oceanography in a quasi-geostrophic model [5] and has been applied to a mesoscale model of the atmosphere [4]. The nudging coefficients can be optimized by a variational method [3,6].

The backward nudging algorithm consists in solving the state equations of the model backwards in time, starting from the observation of the state of the system at the final instant. A nudging term, with the opposite sign compared to the standard nudging algorithm, is added to the state equations, and the final obtained state is in fact the initial state of the system [1].

The back and forth nudging algorithm, introduced in this paper, consists in solving first the forward nudging equation and then the direct system backwards in time with a feedback term which is opposite to the one introduced

in the forward equation. The ‘initial’ condition of this backward resolution is the final state obtained by the standard nudging method. After resolution of this backward equation, one obtains an estimate of the initial state of the system. We repeat these forward and backward resolutions (with the feedback terms) until convergence of the algorithm. This algorithm can be compared to the 4D-VAR algorithm, which consists also in a sequence of forward and backward resolutions. In our algorithm, even for nonlinear problems, it is useless to linearize the system and the backward system is not the adjoint equation but the direct system, with an extra feedback term that stabilizes the resolution of this ill-posed backward resolution.

We will first present the standard nudging algorithm for a linear model, and then the nudging algorithm applied to the corresponding backward model. Then we will introduce the new BFN algorithm, and give results about its convergence and asymptotic behaviours.

2. General theory of the nudging algorithm for a linear model

2.1. Forward nudging

Let us consider a linear model governed by a system of a linear ODE:

$$\frac{dX}{dt} = AX, \quad 0 < t < T, \quad (1)$$

with an initial condition $X(0) = x_0$. Suppose that we have an observation of the state variable $X(t)$, that we call $X_{\text{obs}}(t)$. If we apply nudging to the model (1), we obtain

$$\begin{cases} \frac{dX}{dt} = AX + K(X_{\text{obs}} - X), & 0 < t < T, \\ X(0) = x_0, \end{cases} \quad (2)$$

where K is the nudging matrix. It is then easy to prove that we have

$$X(t) = e^{-(K-A)t} \int_0^t e^{(K-A)s} K X_{\text{obs}}(s) ds + e^{-(K-A)t} x_0. \quad (3)$$

Let the nudging matrix K be a symmetric definite positive matrix. If K is large enough, then $K - A$ is automatically definite, and one can easily prove that, for any $t \in]0, T]$, if X_{obs} is locally continuous around t ,

$$X(t) \xrightarrow{K \rightarrow +\infty} X_{\text{obs}}(t), \quad (4)$$

where $K \rightarrow +\infty$ means that any eigenvalue of K tends to infinity, e.g. $\min(\text{Sp}(K)) \rightarrow +\infty$.

2.2. Backward nudging

We now assume that we have a final condition in (1) instead of an initial condition. This leads to the following backward equation:

$$\begin{cases} \frac{d\tilde{X}}{dt} = A\tilde{X}, & T > t > 0, \\ \tilde{X}(T) = \tilde{x}_T. \end{cases} \quad (5)$$

If we apply nudging to this backward model with the opposite sign of the feedback term (in order to have a well posed problem), we obtain

$$\begin{cases} \frac{d\tilde{X}}{dt} = A\tilde{X} - K(X_{\text{obs}} - \tilde{X}), & T > t > 0, \\ \tilde{X}(T) = \tilde{x}_T, \end{cases} \tag{6}$$

and then

$$\tilde{X}(t) = e^{-(K+A)(T-t)} \int_0^{T-t} e^{(K+A)s} K X_{\text{obs}}(T-s) ds + e^{-(K+A)(T-t)} \tilde{x}_T. \tag{7}$$

Once again, for any $t \in [0, T]$, if K is large enough so that $(K + A)$ is definite, we have

$$\tilde{X}(t) \xrightarrow{K \rightarrow +\infty} X_{\text{obs}}(t). \tag{8}$$

One may remark that the asymptotic behaviour (when K goes to infinity) of $X(t)$ (resp. $\tilde{X}(t)$) is independent of x_0 (resp. \tilde{x}_T).

3. General theory of the Back and Forth Nudging (BFN) algorithm

Let us consider the algorithm

$$\begin{cases} \frac{dX_k}{dt} = AX_k + K(X_{\text{obs}} - X_k), \\ X_k(0) = \tilde{X}_{k-1}(0), \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{d\tilde{X}_k}{dt} = A\tilde{X}_k - K(X_{\text{obs}} - \tilde{X}_k), \\ \tilde{X}_k(T) = X_k(T), \end{cases} \tag{9}$$

with $\tilde{X}_{-1}(0) = x_0$. Then, $X_0(0) = x_0$, and a resolution of the direct model gives $X_0(T)$ and hence $\tilde{X}_0(T)$. A resolution of the backward model provides $\tilde{X}_0(0)$, which is equal to $X_1(0)$, and so on. We can easily show that, if $n \geq 1$ and $T > 0$,

$$X_n(0) = (I - e^{-2KT})^{-1} (I - e^{-2nKT}) \int_0^T (e^{-(K+A)s} + e^{-2KT} e^{(K-A)s}) K X_{\text{obs}}(s) ds + e^{-2nKT} x_0 \tag{10}$$

and

$$X_n(t) = e^{-(K-A)t} \int_0^t e^{(K-A)s} K X_{\text{obs}}(s) ds + e^{-(K-A)t} X_n(0). \tag{11}$$

Theorem 3.1. *If $n \rightarrow +\infty$, we have convergence of $X_n(0)$ and*

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} X_n(0) = X_\infty(0) = (I - e^{-2KT})^{-1} \int_0^T (e^{-(K+A)s} + e^{-2KT} e^{(K-A)s}) K X_{\text{obs}}(s) ds. \tag{12}$$

Moreover, if $T > 0$, for any $t \in [0, T]$,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} X_n(t) = X_\infty(t) = e^{-(K-A)t} \int_0^t e^{(K-A)s} K X_{\text{obs}}(s) ds + e^{-(K-A)t} X_\infty(0). \tag{13}$$

Under the same hypothesis, we have a similar result for backward trajectories, e.g. there exists a function $\tilde{X}_\infty(t)$ so that $\lim_{n \rightarrow +\infty} \tilde{X}_n(t) = \tilde{X}_\infty(t)$, for any $t \in [0, T]$. This proves the convergence of the BFN algorithm.

As in Section 2.1, we also have an asymptotic behaviour when K goes to infinity for the limit trajectory $X_\infty(t)$ (and also for the backward limit trajectory $\tilde{X}_\infty(t)$), but now it is valid for any $t \in [0, T]$ (even for $t = 0$):

$$X_\infty(t) \xrightarrow{K \rightarrow +\infty} X_{\text{obs}}(t), \quad \forall t \in [0, T]. \quad (14)$$

Let us remark that the function X_∞ is totally independent of the initial condition x_0 of the algorithm.

4. Conclusion

We have proved the convergence of the BFN algorithm on a linear model, provided that the feedback term is large enough. This algorithm is hence very promising to obtain a correct initial state, with a very easy implementation because it requires neither the linearization of the equations in order to have the adjoint model, nor any minimization process.

References

- [1] D. Auroux, Étude de différentes méthodes d'assimilation de données pour l'environnement, Thèse de l'Université de Nice Sophia-Antipolis, 2003.
- [2] J. Hoke, R.A. Anthes, The initialization of numerical models by a dynamic initialization technique, *Month. Weaver Rev.* 104 (1976) 1551–1556.
- [3] D.R. Stauffer, J.W. Bao, Optimal determination of nudging coefficients using the adjoint equations, *Tellus A* 45 (1993) 358–369.
- [4] D.R. Stauffer, N.L. Seaman, Use of four dimensional data assimilation in a limited area mesoscale model – Part 1: Experiments with synoptic-scale data, *Month. Weather Rev.* 118 (1990) 1250–1277.
- [5] J. Verron, W.R. Holland, Impact de données d'altimétrie satellitaire sur les simulations numériques des circulations générales océaniques aux latitudes moyennes, *Ann. Geophys.* 7 (1) (1989) 31–46.
- [6] X. Zou, I.M. Navon, F.-X. Le Dimet, An optimal nudging data assimilation scheme using parameter estimation, *Quart. J. Roy. Meteorol. Soc.* 118 (1992) 1163–1186.