

Didier AUROUX

Laboratoire MIP - Institut de Mathématiques de Toulouse

Université Paul Sabatier Toulouse 3

auroux@math.univ-toulouse.fr



Algorithmes rapides pour le traitement d'images et l'assimilation de données

Soutenance d'habilitation à diriger des recherches,

Institut de Mathématiques, Toulouse

26 Novembre 2008



1. **Traitement d'images par analyse asymptotique topologique.**

Applications à la restauration, la classification, la segmentation, et l'inpainting.

2. **Assimilation de données : le nudging direct et rétrograde.**

Étude théorique de convergence, applications numériques à plusieurs modèles (Lorenz, Burgers 1D, Saint Venant 2D, quasi-géostrophique barocline 3D).

3. **Assimilation de données images.**

Extraction et identification de champs de vitesses à partir de séquences d'images.



Plan de l'exposé



1. Introduction
2. Traitement d'images par analyse asymptotique topologique
 - (a) Analyse asymptotique topologique
 - (b) Application à l'inpainting
 - (c) Autres applications
 - (d) Complexité des algorithmes
3. Nudging direct et rétrograde pour l'assimilation de données
 - (a) Présentation de l'algorithme
 - (b) Choix des paramètres
 - (c) Quelques résultats de convergence
 - (d) Application à un modèle shallow-water
4. Conclusions générales



INTRODUCTION GÉNÉRALE ET MOTIVATIONS



Contraintes :

- Besoin de méthodes **opérationnelles** en assimilation de données (ex : prévisions météorologiques toutes les 6 heures), et de traitement des images en **temps réel** (ex : aide au diagnostic médical, télévision par internet).
- Facilité d'**utilisation** et de **mise en œuvre** des méthodes développées (peu de paramètres à régler, peu de développement informatique nécessaire).
- **Taille** grandissante des données (satellites d'observation de la Terre, photos et films de résolution toujours plus grande).

↪ recherche et développement de méthodes **simples, efficaces** et **rapides**.

↪ algorithmes en **rupture avec l'état de l'art**.

TRAITEMENT D'IMAGES PAR ANALYSE ASYMPTOTIQUE TOPOLOGIQUE



Introduction



Prérequis pour le traitement d'images : **identification de formes** (contours, objets caractéristiques, ...).

Difficulté : **non différentiabilité** du problème (identification d'un domaine optimal, ou de sa fonction caractéristique).

Approches classiques : méthodes de **relaxation**, approche par **level-sets**.

Optimisation topologique : permet de faire varier la fonction caractéristique de 0 à 1 dans une zone infinitésimale.

↪ Différentiabilité, dérivation d'un **gradient topologique**.

↪ Approche **rapide** et **efficace** en électromagnétisme, mécanique des structures, conception de formes, ...

⇒ Méthode a priori bien **adaptée au traitement d'images**.



Étude de la variation d'une fonction coût par rapport à une petite perturbation du domaine.

Notations : Soit Ω un ouvert de \mathbb{R}^n , on considère une **EDP** sur Ω :

$$\text{trouver } u \in \mathcal{V} \text{ tel que } a(u, w) = l(w), \forall w \in \mathcal{V}.$$

On considère une **fonction coût** $J(\Omega, u)$ mesurant un critère sur la solution u .

Perturbation : Insertion d'une **fissure** de petite taille $\sigma_\rho = x_0 + \rho\sigma(n) \rightsquigarrow$ **domaine perturbé** $\Omega_\rho = \Omega \setminus \sigma_\rho$. EDP perturbée :

$$\text{trouver } u_\rho \in \mathcal{V}_\rho \text{ tel que } a_\rho(u_\rho, w) = l_\rho(w), \forall w \in \mathcal{V}_\rho.$$

La fonction coût peut être réécrite comme une fonction de ρ uniquement :

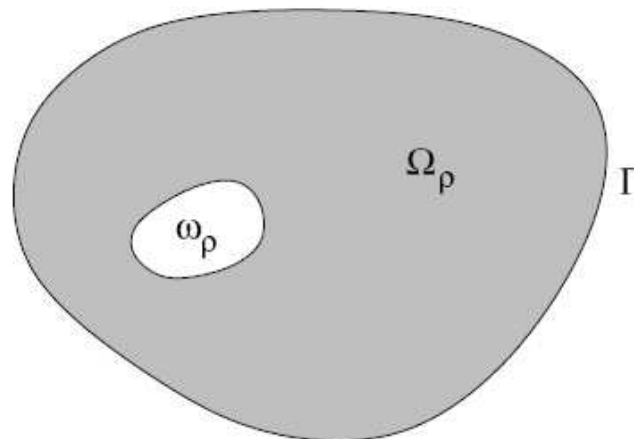
$$j : \rho \mapsto \Omega_\rho \mapsto u_\rho \text{ solution de l'EDP perturbée} \mapsto j(\rho) := J(\Omega_\rho, u_\rho).$$

Développement asymptotique : donné par la théorie de l'analyse asymptotique topologique lorsque ρ tend vers 0 :

$$j(\rho) - j(0) = f(\rho)G(x_0) + o(f(\rho)),$$

où $f(\rho) > 0$, $\lim_{\rho \rightarrow 0} f(\rho) = 0$, et $G(x_0)$ est appelé le **gradient topologique** au point x_0 d'insertion de la perturbation [Masmoudi, 2001].

La minimisation du critère j consiste alors à **perturber le domaine** aux endroits où le gradient topologique G est le plus **négatif**.





But : reconstituer les parties cachées d'une image, retirer un masque, une tache, ...

Approches classiques : méthodes d'[apprentissage](#) [Wen et al., 2006], minimisation de la [variation totale](#) [Chan-Shen, 2000-2005], [analyse morphologique](#) [Elad et al., 2005-2006], ...



Approches classiques : temps de calcul élevé (méthodes itératives), nombreux paramètres à régler, ...

↪ développement d'une méthode **efficace, rapide, et facile à utiliser**.

Identification des contours cachés : technique de **détection des fissures**, basée sur la **diffusion thermique** [Perona-Malik, 1990; Morel et al., 1992; Weickert, 1994-2001; ...].

Idée-clé : la **conductivité thermique ne prend que deux valeurs** : 0 (sur les fissures) ou 1 (en dehors des fissures).

Utilisation de **deux mesures** ↪ problèmes de **Dirichlet** et de **Neumann** [DAMasmoudi, 2006-2008].

Localisation des fissures : Ω représente l'image, Γ sa frontière, et on note $\omega \subset \Omega$ la partie cachée (inconnue) de l'image, et γ sa frontière. Soit v l'image dégradée, que l'on souhaite reconstituer.

Pour une fissure σ donnée dans ω , $u_D(\sigma)$ et $u_N(\sigma) \in H^1(\Omega \setminus \sigma)$ sont solutions des problèmes de **Dirichlet** et **Neumann** :

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta u_D = 0 \quad \text{dans } \omega \setminus \sigma, \\ u_D = v \quad \text{sur } \gamma, \\ \partial_n u_D = 0 \quad \text{sur } \sigma, \\ u_D = v \quad \text{dans } \Omega \setminus \omega. \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} \Delta u_N = 0 \quad \text{dans } \omega \setminus \sigma, \\ \partial_n u_N = \partial_n v \quad \text{sur } \gamma, \\ \partial_n u_N = 0 \quad \text{sur } \sigma, \\ u_N = v \quad \text{dans } \Omega \setminus \omega. \end{array} \right.$$



Application à l'inpainting



But : identifier les fissures afin de faire coïncider les deux solutions :

$$J(\sigma) = \frac{1}{2} \|u_D - u_N\|_{L^2(\Omega)}^2.$$

Développement asymptotique :

Si $\sigma = x + \rho\bar{\sigma}$, et $j(\rho) := J(\sigma)$, alors

$$j(\rho) - j(0) = f(\rho)g(x, n) + o(f(\rho)),$$

où le gradient topologique g est donné par

$$g(x, n) = - [(\nabla u_D(x) \cdot n)(\nabla p_D(x) \cdot n) + (\nabla u_N(x) \cdot n)(\nabla p_N(x) \cdot n)].$$

p_N et p_D sont les deux états adjoints correspondant aux deux solutions directes u_N et u_D .

[Amstutz, 2001 ; DA-Masmoudi, 2006]



Application à l'inpainting



Réécriture du gradient topologique :

$$g(x, n) = - [(\nabla u_D(x) \cdot n)(\nabla p_D(x) \cdot n) + (\nabla u_N(x) \cdot n)(\nabla p_N(x) \cdot n)] = n^T M(x) n,$$

où $M(x)$ est une matrice symétrique 2×2 (ou 3×3 dans le cas d'images tri-dimensionnelles, ou films) définie par

$$M(x) = -sym(\nabla u_D(x) \otimes \nabla p_D(x) + \nabla u_N(x) \otimes \nabla p_N(x)).$$

On en déduit que la **valeur minimale** de $g(x, n)$ est atteinte lorsque n est le vecteur propre associé à la **valeur propre** $\lambda_{min}(M(x))$ la plus **négative** de $M(x)$.



Algorithme :

- Résolution des deux problèmes directs non perturbés ($\sigma = \emptyset$).
- Résolution des deux problèmes adjoints non perturbés.
- Assemblage en chaque point $x \in \omega$ de la matrice $M(x)$.
- Définition de l'ensemble des fissures identifiées :

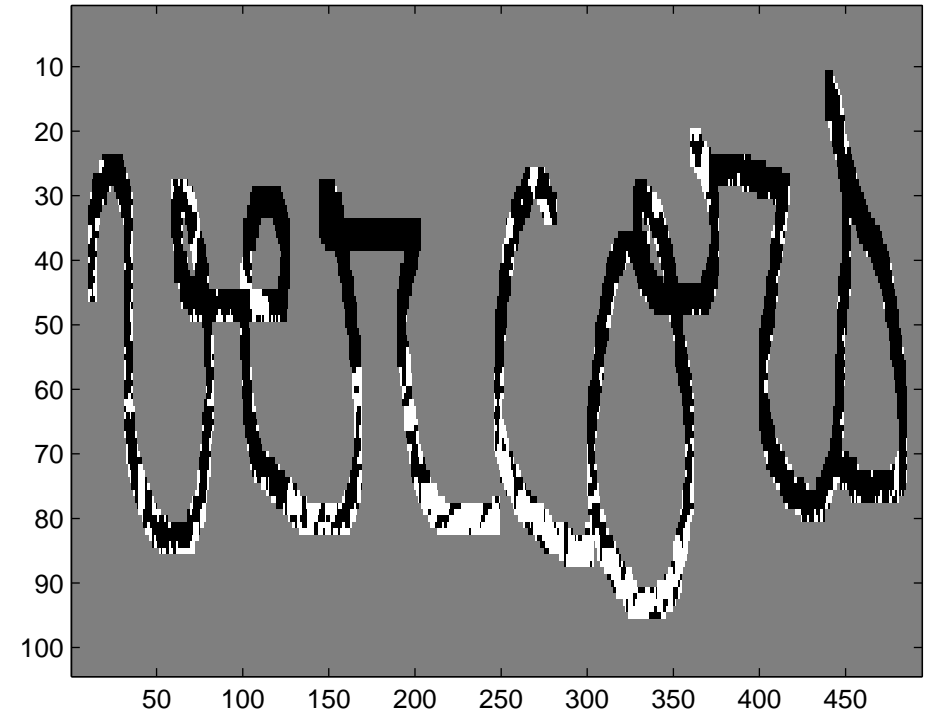
$$\sigma = \{x \in \omega; \lambda_{\min}(M(x)) < \delta < 0\},$$

où δ est un seuil négatif.

- Résolution du problème de Neumann direct perturbé par σ .

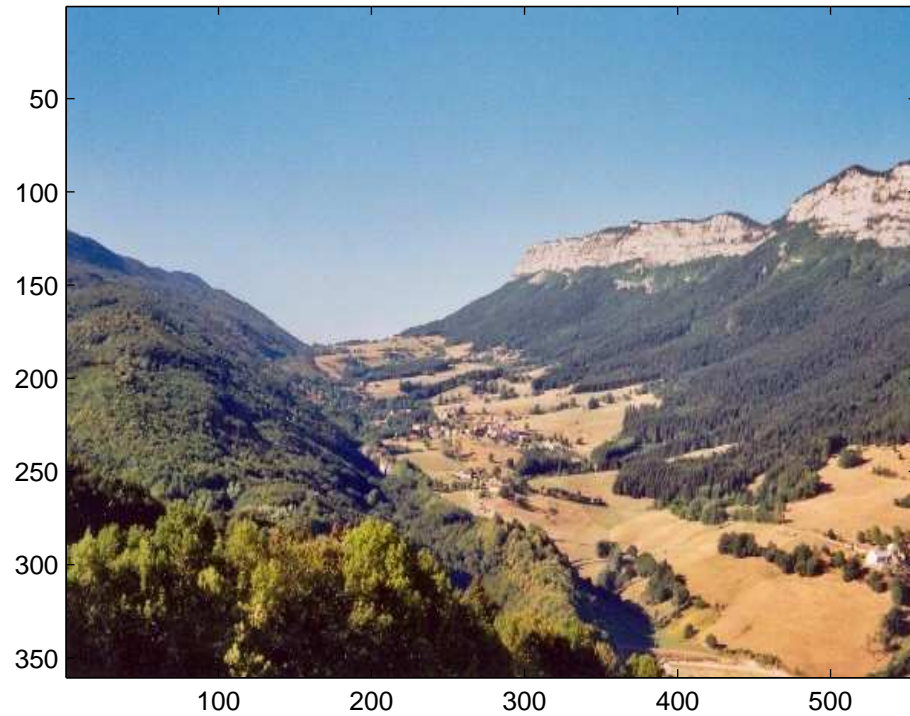


(a)

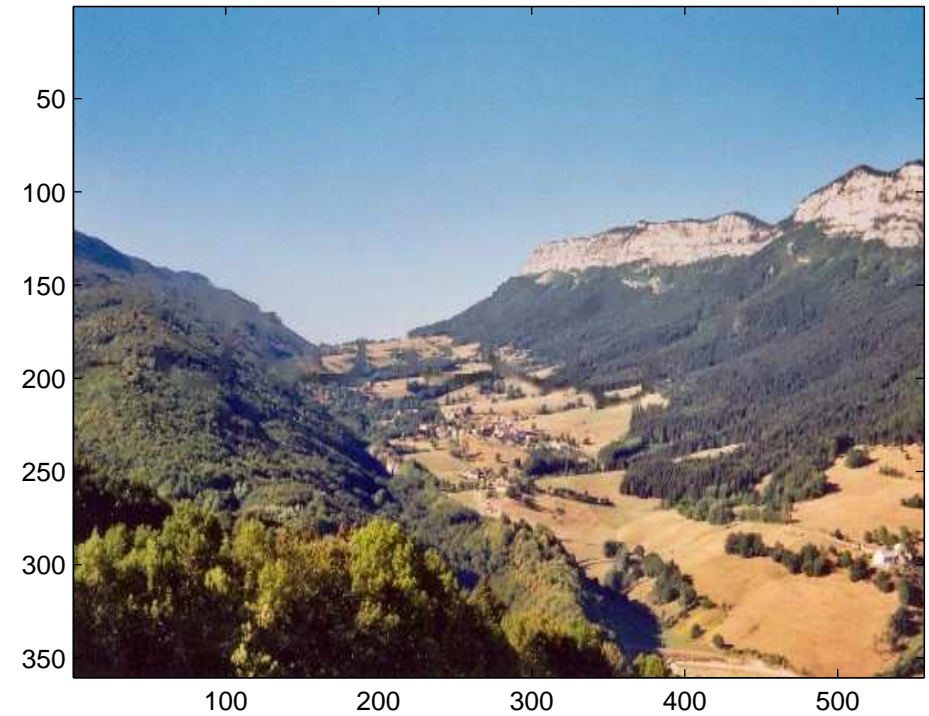


(b)

FIG. 1 – Image originale (a) ; Contours cachés identifiés par le gradient topologique (b).



(a)

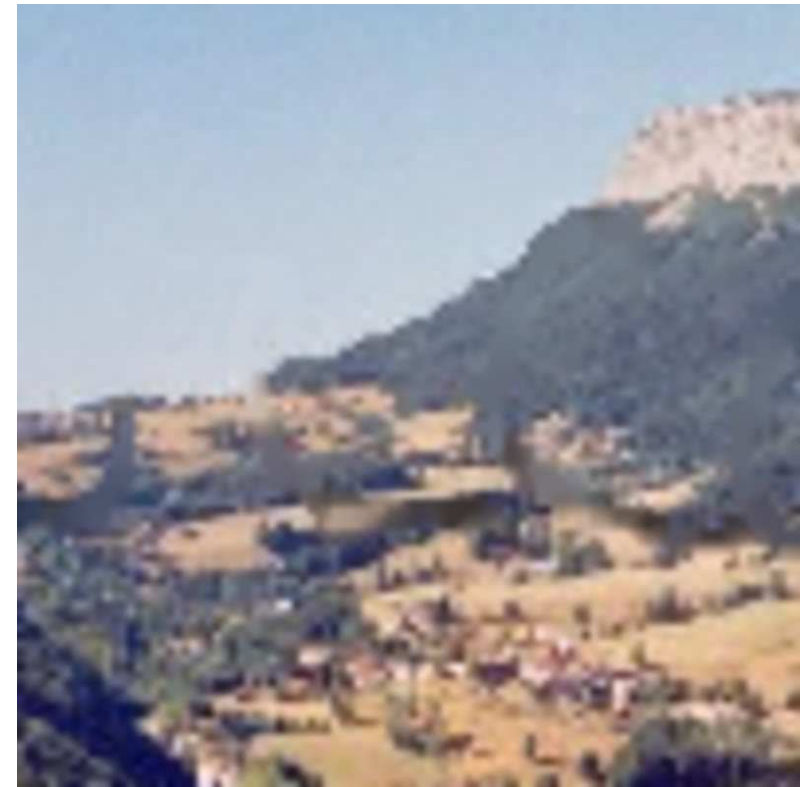


(b)

FIG. 2 – Image originale (a) ; image reconstruite (b).



(a)



(b)

FIG. 3 – Zoom : image originale (a) ; image reconstruite (b).

Restauration d'images : [Jaafar et al., 2006 ; DA-Jaafar-Masmoudi, 2006]

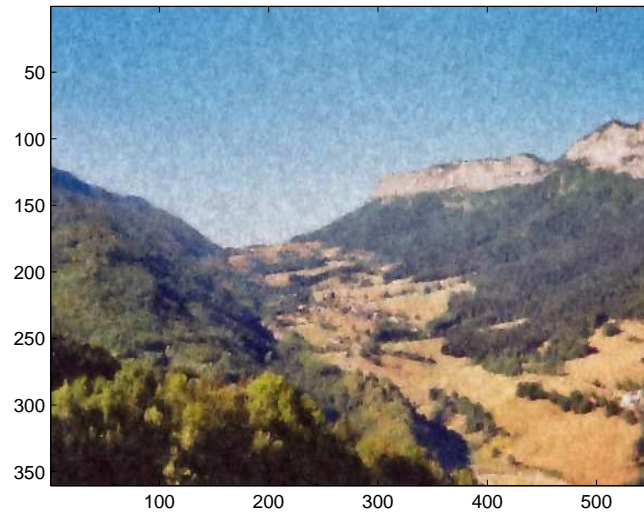
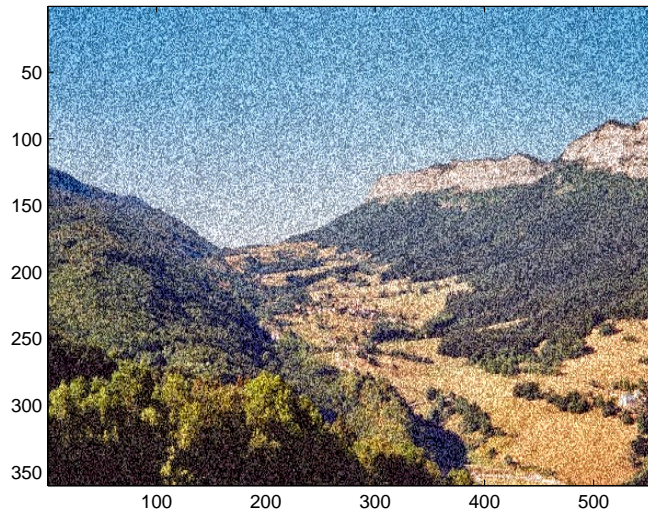


Image bruitée
(SNR=10.74) ;
image restaurée
(SNR=21.09).

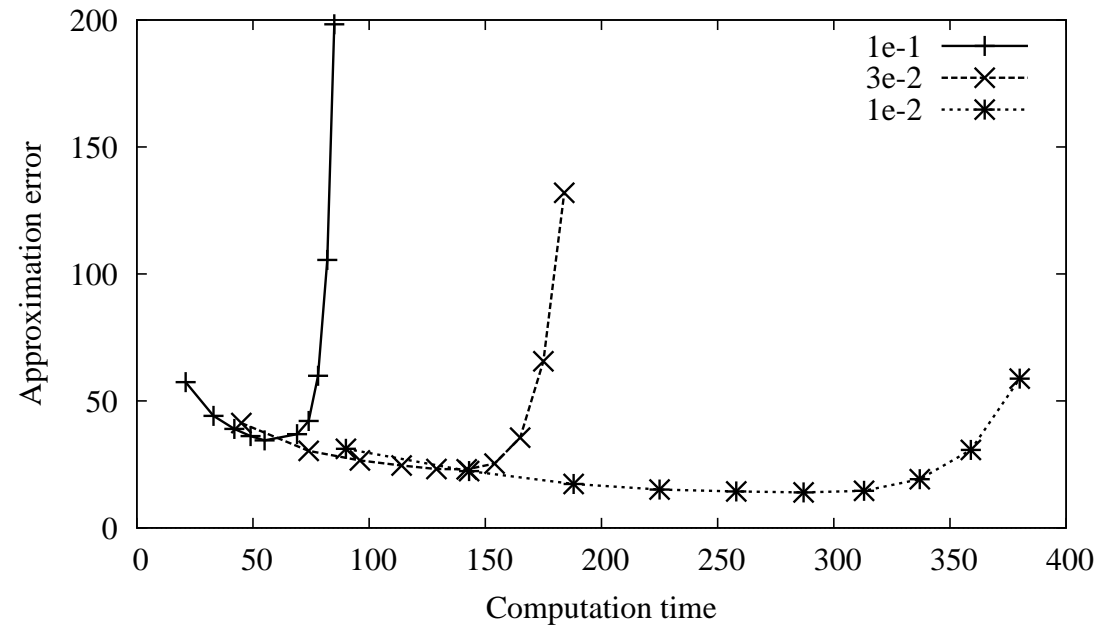
$$\begin{cases} -\operatorname{div}(c\nabla u) + u = v & \text{dans } \Omega, \\ \partial_n u = 0 & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases}$$

Choix de la conductivité : **diffusion linéaire** (c constant), **non linéaire** ($c =$ fonction non linéaire de ∇u), ... Dans notre approche, c ne prend que deux valeurs, **0 sur les contours ou 1 en dehors**.

(Exemple de résultat sur un film)

Segmentation d'images :

$$\begin{cases}
 (\tilde{\mathcal{P}}_\varepsilon) & u_\varepsilon \in H^1(\Omega \setminus \sigma) \\
 -\operatorname{div} \left(\frac{1}{\varepsilon} \nabla u_\varepsilon \right) + u_\varepsilon = v & \Omega \setminus \sigma, \\
 \partial_n u_\varepsilon = 0 & \sigma, \\
 \partial_n u_\varepsilon = 0 & \partial\Omega.
 \end{cases}$$



Développement en série entière et analyticité :

$$\exists \varepsilon_R > 0 \text{ et } (u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in H^1(\Omega \setminus \sigma) \text{ tels que } \forall 0 \leq \varepsilon \leq \varepsilon_R, \quad u_\varepsilon = \sum_{n=0}^{\infty} u_n \varepsilon^n.$$

Approximation :

Calcul de l'image segmentée u_0 par **extrapolation**   partir de solutions de $(\tilde{\mathcal{P}}_\varepsilon)$ pour plusieurs $\varepsilon \geq \varepsilon_c$. [DA, 2008]



Tous les algorithmes que nous avons utilisés reposent sur des résolutions de l'équation

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(c\nabla u) + u = v & \text{dans } \Omega, \\ \partial_n u = 0 & \text{sur } \partial\Omega, \end{cases}$$

avec différentes valeurs de c . Les premières résolutions se font avec une **conductivité c constante**.

Transformée de cosinus discrète (DCT) :

$$\sum_{m,n} (1 + c(m\pi)^2 + c(n\pi)^2) u_{m,n} \phi_{m,n} = \sum_{m,n} v_{m,n} \phi_{m,n},$$

où les fonctions $\phi_{m,n} = \delta_{m,n} \cos(m\pi x) \cos(n\pi y)$ forment une base de cosinus dans \mathbb{R}^2 , et où $(v_{m,n})$ représente les coefficients de la DCT de l'image originale v .



La résolution des problèmes non perturbés se fait de la façon suivante :

- Calcul des coefficients $v_{m,n}$ de la DCT de l'image originale v .
- Calcul des coefficients $u_{m,n}$:

$$u_{m,n} = \frac{v_{m,n}}{1 + c(m\pi)^2 + c(n\pi)^2}.$$

- Assemblage de l'image u à partir de ses coefficients $u_{m,n}$ par une DCT inverse.

La complexité d'une DCT est $\mathcal{O}(n \cdot \log(n))$ où n est le nombre de pixels de l'image.



Le problème perturbé qu'il faut résoudre peut s'écrire sous la forme

$$A(c)u = b,$$

où u est l'inconnue. Ce problème se résout très rapidement dans le cas c constant. L'idée est de preconditionner le cas où c n'est pas constant à l'aide du cas constant. Le problème perturbé est équivalent au problème suivant :

$$[A(c_0)^{-1}A(c)] u = [A(c_0)^{-1}b].$$

Gradient conjugué preconditionné : pour les problèmes perturbés, c est proche de c_0 (ensemble *discret* de contours) \rightsquigarrow la matrice du système à résoudre est **proche de l'identité**.

Complexité théorique de nos algorithmes : $\mathcal{O}(n \cdot \log(n))$ opérations, où n est le nombre de pixels dans l'image \rightsquigarrow traitement des images et films en **temps réel**.

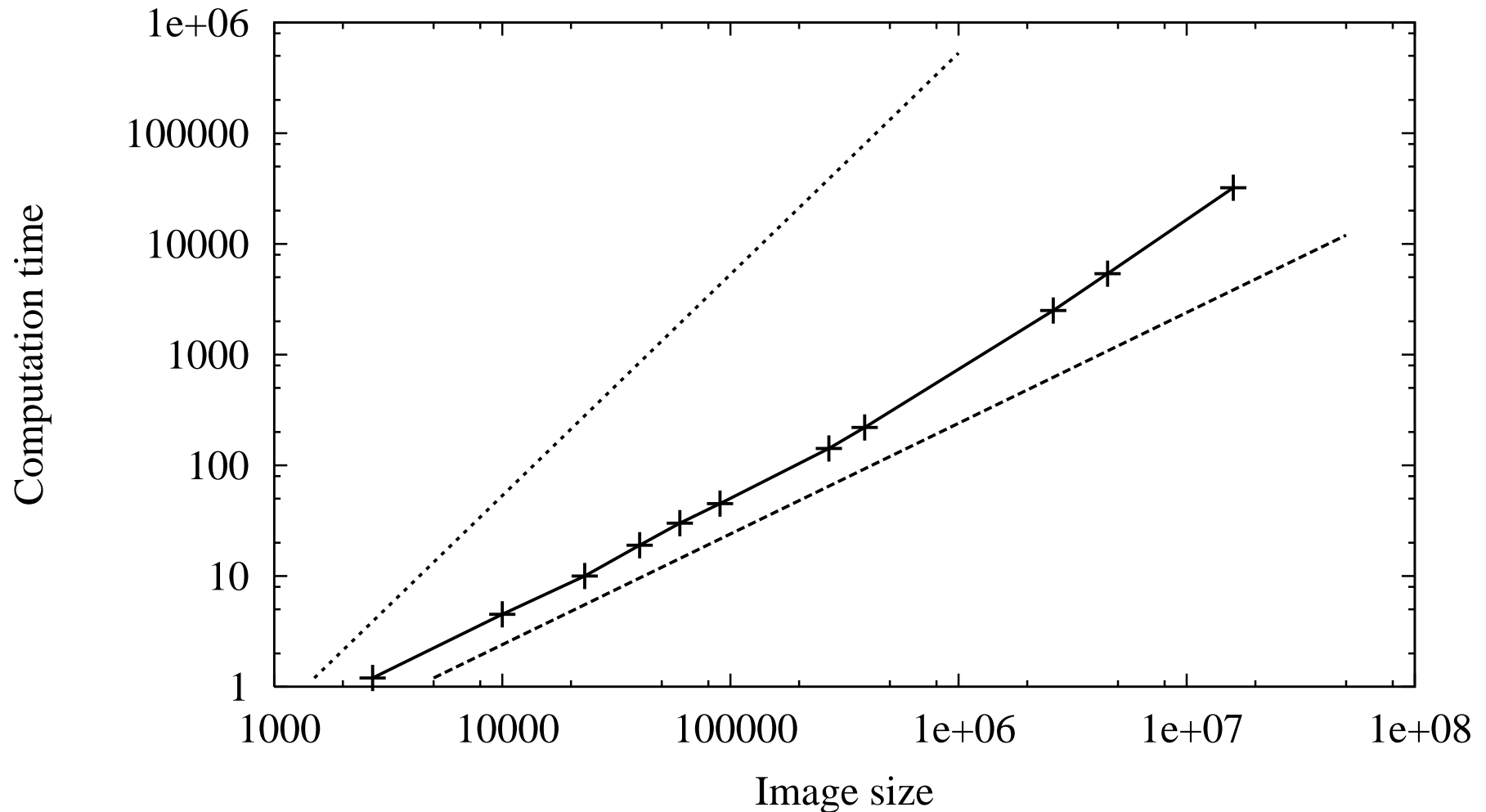


FIG. 4 – Temps de calcul en fonction de la taille de l'image.



Conclusions



- Technique de **détection de fissures** basée sur le gradient topologique.
- Algorithme **facile à utiliser** : très peu de réglages.
- Permet de traiter indifféremment les images en 2D / 3D / noir & blanc / couleur.
- Complexité théorique et numérique \rightsquigarrow traitement des images/films en **temps réel**.
- Plusieurs applications : **inpainting**, **restauration**, **segmentation**, **classification**.
- **Implémentation facile** grâce à la **base commune** pour tous les algorithmes.



- Utiliser des opérateurs différentiels d'ordre plus élevé que le Laplacien.
- Définir plusieurs niveaux de conductivité pour identifier plusieurs catégories de contours.
- Étudier d'autres applications (compression, identification de structures, ...).

NUDGING DIRECT ET RÉTROGRADE (BACK AND FORTH NUDGING) POUR L'ASSIMILATION DE DONNÉES



Motivations



Études environnementales et géophysiques : **prévoir** l'évolution naturelle du système

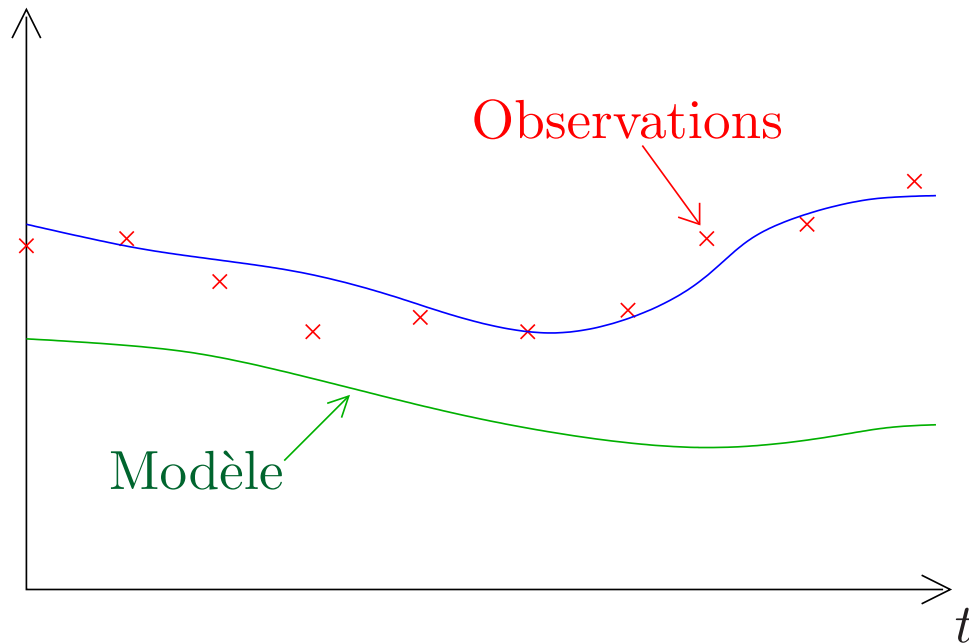
↔ **estimer** au mieux l'état présent (ou la *condition initiale*) de l'environnement.

Fluides géophysiques (atmosphère, océans, ...) : systèmes **turbulents** \implies forte dépendance envers la condition initiale \implies nécessité d'avoir une identification précise (plus précise que les observations).

Problèmes environnementaux (pollution souterraine, pollution de l'air, tempêtes, cyclones, ...) : problèmes de très grande taille, généralement mal modélisés et/ou observés.

L'assimilation de données consiste à **combiner de façon optimale** les **observations** d'un système et la connaissance des **lois physiques** qui le gouvernent.

But : **identifier** la condition initiale, ou **estimer** les paramètres inconnus du modèle, et en déduire des **prévisions** fiables de l'évolution du système.



combinaison
modèle + observations
↓
identification de la condition initiale
d'un système géophysique

Fondamental pour les systèmes chaotiques ou turbulents (atmosphère, océan)

Difficultés : ces systèmes sont généralement irréversibles.



Méthodes d'assimilation de données :

- **4D-VAR** : méthode de contrôle optimal, visant à minimiser l'écart quadratique entre le modèle et les observations.

Inconvénients : nécessite la mise en œuvre de l'adjoint, et un minimiseur performant. [Le Dimet-Talagrand, 1986]

- Filtres de **Kalman** : méthodes séquentielles alternant des étapes de prévision et correction.

Inconvénients : coût de la propagation des erreurs de covariance, gestion de l'erreur modèle. [Kalman, 1960 ; Evensen, 2003]

↪ développement d'une nouvelle méthode **rapide**, **efficace**, et **facile** à mettre en œuvre : le **nudging direct et rétrograde**, à l'interface des méthodes séquentielles et variationnelles.



Présentation de l'algorithme



Considérons un modèle régi par un système d'EDP (ou EDO après discrétisation) :

$$\frac{dX}{dt} = F(X), \quad 0 < t < T,$$

avec une condition initiale $X(0) = x_0$.

$X_{obs}(t)$: observations du système, H : opérateur d'observation

Nudging direct :

$$\begin{cases} \frac{dX}{dt} = F(X) + K(X_{obs} - H(X)), & 0 < t < T, \\ X(0) = x_0, \end{cases}$$

où K est la matrice de nudging (ou de gain).

Dans un cadre linéaire (où F est une matrice), le nudging direct s'apparente à l'observateur de [Luenberger](#) (ou observateur asymptotique).



- Météorologie : [Hoke-Anthes, 1976]
- Océanographie (modèle QG) : [Verron-Holland, 1989]
- Atmosphère (mésos-échelle) : [Stauffer-Seaman, 1990]
- Détermination optimale des coefficients de nudging :
[Zou-Navon-Le Dimet, 1992 ; Stauffer-Bao, 1993 ;
Vidard-Le Dimet-Piacentini, 2003]



Observateur de Luenberger, ou observateur asymptotique :

[Luenberger, 1966]

$$\begin{cases} \frac{dX}{dt} = FX + K(X_{obs} - HX), \\ \frac{d\hat{X}}{dt} = F\hat{X}, \quad X_{obs} = H\hat{X}. \end{cases}$$

$$\frac{d}{dt}(X - \hat{X}) = (F - KH)(X - \hat{X})$$

Si $F - KH$ est une [matrice de Hurwitz](#), i.e. spectre strictement inclus dans le demi-plan $\{\lambda \in \mathbb{C}; \operatorname{Re}(\lambda) < 0\}$, alors $X \rightarrow \hat{X}$ quand $t \rightarrow +\infty$.

Algorithme du nudging direct et rétrograde

Back and Forth Nudging (BFN) :

[DA-Blum, 2005]

Algorithme itératif (résolutions directes et rétrogrades) :

$$\tilde{X}_0(0) = \tilde{x}_0 \text{ (ébauche)}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dX_k}{dt} = F(X_k) + K(X_{obs} - H(X_k)) \quad 0 < t < T \\ X_k(0) = \tilde{X}_{k-1}(0) \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d\tilde{X}_k}{dt} = F(\tilde{X}_k) - K'(X_{obs} - H(\tilde{X}_k)) \quad T > t > 0 \\ \tilde{X}_k(T) = X_k(T) \end{array} \right.$$

Choix des paramètres

Choix de la matrice de nudging direct K :

Discrétisation temporelle (avec un schéma implicite) de l'équation directe avec nudging :

$$\frac{X^{n+1} - X^n}{\Delta t} = F X^{n+1} + K(X_{obs} - H X^{n+1}).$$

On en déduit que le nudging direct est un compromis entre le minimisation de l'énergie du système et le carré de la distance aux observations :

$$\min_X \left[\frac{1}{2} \langle X - X^n, X - X^n \rangle - \frac{\Delta t}{2} \langle F X, X \rangle + \frac{\Delta t}{2} \langle R^{-1} (X_{obs} - H X), X_{obs} - H X \rangle \right],$$

en choisissant par exemple

$$K = H^T R^{-1}$$

où R est la matrice de covariance des erreurs d'observation.

[DA-Blum, 2008]



Choix de la matrice de nudging rétrograde K' :

Le terme de rappel a un double rôle :

- **stabilisation** de l'intégration rétrograde du modèle (système irréversible)
- **feedback aux observations**

Si le système est **observable**, i.e. $\text{rang}[H, HF, \dots, HF^{N-1}] = N$, alors il existe une matrice K' telle que $-F - K'H$ est une matrice de Hurwitz (méthode de **placement de pôles**).

En pratique, $K' = k'H^T$ et k' peut être choisi comme la plus petite valeur rendant la résolution numérique rétrograde stable.

Équation de transport linéaire avec viscosité : [DA-Nodet, 2008]

$$\begin{cases} \partial_t u - \nu \partial_{xx} u + a(x) \partial_x u = -K(u - u_{obs}), & u(x, t = 0) = u_0(x), \quad x \in I; \\ \partial_t \tilde{u} - \nu \partial_{xx} \tilde{u} + a(x) \partial_x \tilde{u} = K'(\tilde{u} - u_{obs}), & \tilde{u}(x, t = T) = u_T(x); \\ \partial_t u_{obs} - \nu \partial_{xx} u_{obs} + a(x) \partial_x u_{obs} = 0, & u_{obs}(x, t = 0) = u_{0\,obs}(x); \end{cases}$$

On définit $w(t) = u(t) - u_{obs}(t)$ et $\tilde{w}(t) = \tilde{u}(t) - u_{obs}(t)$ les **erreurs**.

- Si K et K' sont **constants**, alors pour tout $t \in [0, T]$:

$$\tilde{w}(t) = e^{(-K-K')(T-t)} w(t).$$

Encore valable si la période d'observation ne recouvre pas tout $[0, T]$.

- Si le support de K (ou K') ne recouvre pas tout l'intervalle I , alors le système est **mal posé**.



Quelques résultats de convergence



Erreur après k itérations :

$$w_k(0) = e^{-[(K+K')kT]} w_0(0)$$

\rightsquigarrow décroissance **exponentielle** de l'erreur grâce à :

- $K + K'$: rappel infini vers les observations (non physique) ;
- T : observateur asymptotique (Luenberger) ;
- k : nombre d'itérations $\rightarrow +\infty$ (BFN).

Résultats similaires dans le cas d'une **équation de Burgers non visqueux**, avec des conditions aux limites périodiques et des observations bornées, sous hypothèse d'**observabilité** du système.

Modèle shallow-water 2D :

[DA, 2008]

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial_t u - (f + \zeta)v + \partial_x B = \frac{\tau_x}{\rho_0 h} - ru + \nu \Delta u \\ \partial_t v + (f + \zeta)u + \partial_y B = \frac{\tau_y}{\rho_0 h} - rv + \nu \Delta v \\ \partial_t h + \partial_x(hu) + \partial_y(hv) = 0 \end{array} \right.$$

- $\zeta = \partial_x v - \partial_y u$ est la vorticité relative ;
- $B = g^* h + \frac{1}{2}(u^2 + v^2)$ est le potentiel de Bernoulli ;
- $g^* = 0.02 \text{ m.s}^{-2}$ est la gravité réduite ;
- $f = f_0 + \beta y$ est le paramètre de Coriolis (dans l'approximation du β -plan), avec $f_0 = 7.10^{-5} \text{ s}^{-1}$ et $\beta = 2.10^{-11} \text{ m}^{-1}.\text{s}^{-1}$;
- $\tau = (\tau_x, \tau_y)$ est le terme de forçage (par le vent) du modèle, avec une amplitude maximale de $\tau_0 = 0.05 \text{ s}^{-2}$;
- $\rho_0 = 10^3 \text{ kg.m}^{-3}$ est la densité de l'eau, $r = 9.10^{-8} \text{ s}^{-1}$ est le coefficient de friction, $\nu = 5 \text{ m}^2.\text{s}^{-1}$ est le coefficient de viscosité.



Configuration numérique : (exemple de run)

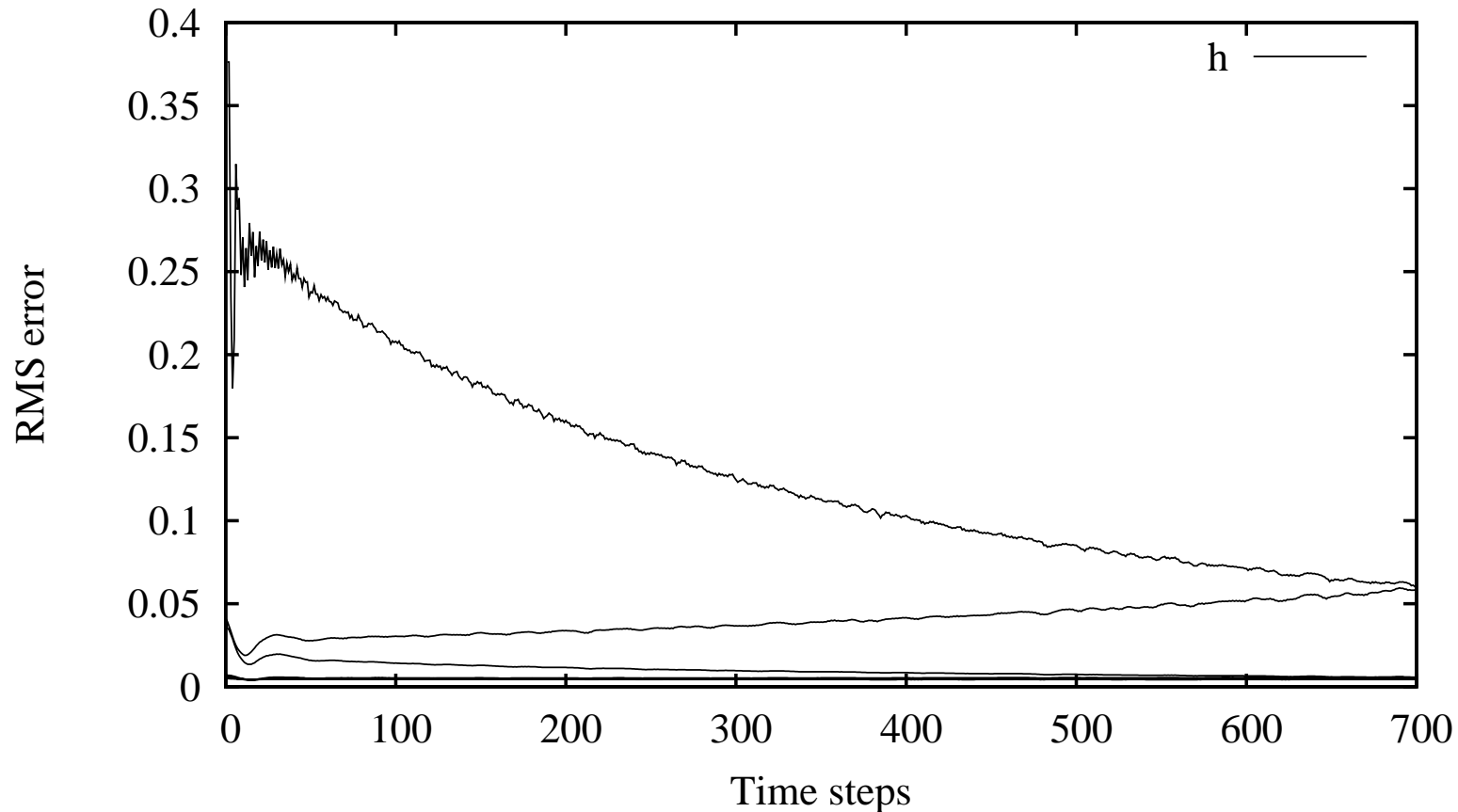
Domaine : $L = 2000 \text{ km} \times 2000 \text{ km}$; Frontières rigides et conditions de non glissement; Pas de temps = 1800 s; Période d'assimilation : 30 jours; Période de prévisions : 30 + 60 jours.

Observations : sur h seulement (\sim observations satellitaires), tous les 5 points de grille dans chaque direction, toutes les 24 heures.

Ébauche (*initial guess*) : état vrai du système un mois avant le début de la période d'assimilation + bruit blanc gaussien.

Comparaison BFN - 4DVAR : hauteur d'eau h ; vitesses u et v .

Convergence de l'algorithme :



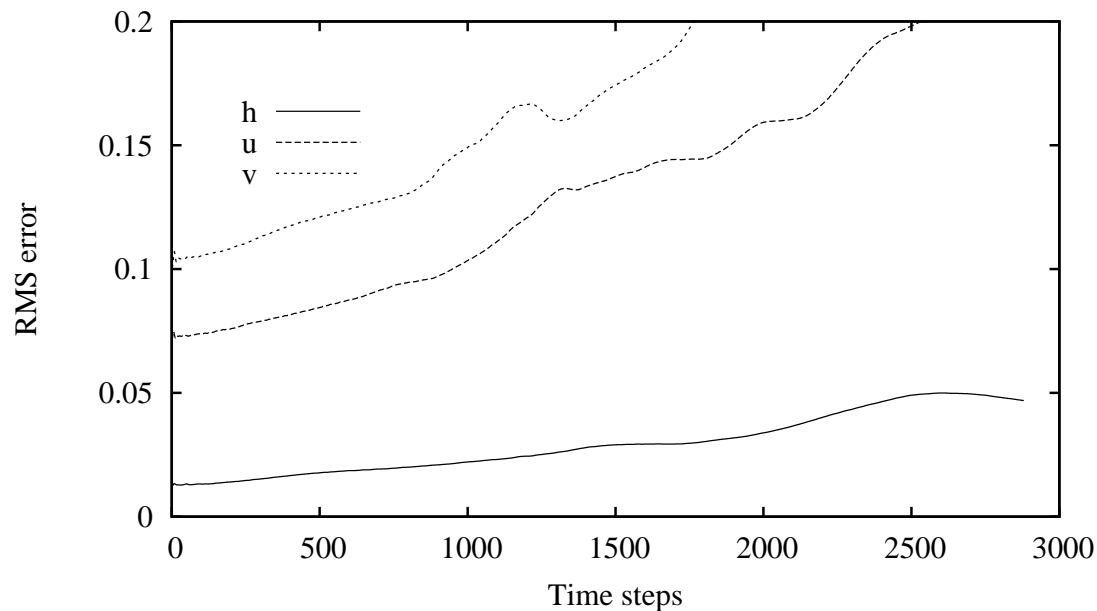
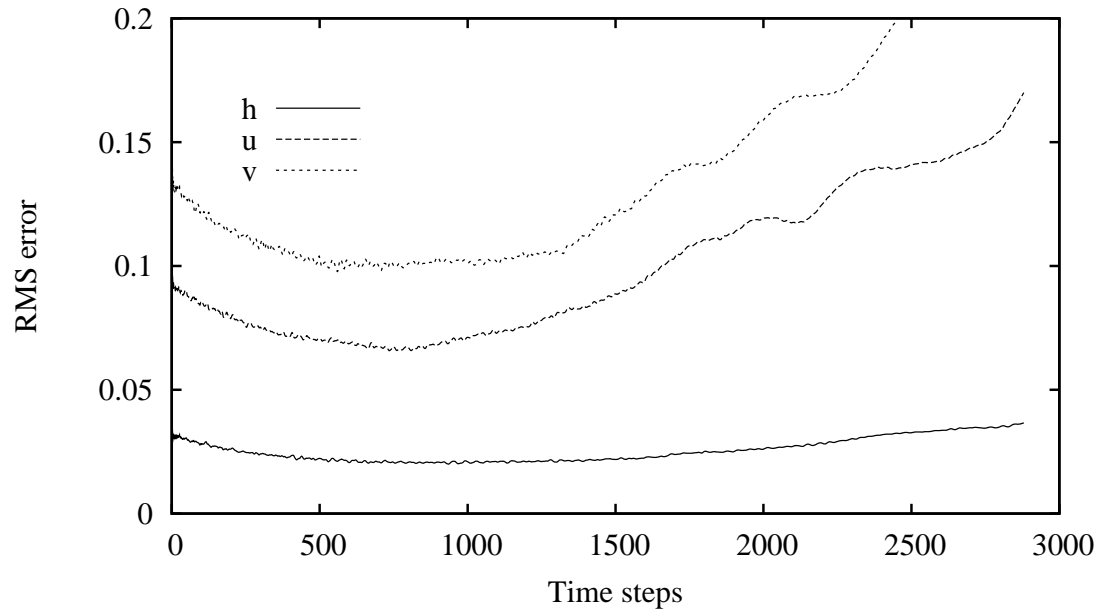
Observations non bruitées.

Différence relative entre les itérés du BFN (5 premières itérations) et la solution exacte en fonction du temps, pour la hauteur d'eau h . [DA, 2008]

Performances de l'algorithme :

Erreur relative	h	u	v
Ébauche	37.6%	21.5%	30.3%
BFN (5 itérations, convergé)	0.44%	1.78%	2.41%
4D-VAR (5 itérations)	0.64%	3.14%	4.47%
4D-VAR (18 itérations, convergé)	0.61%	2.43%	3.46%

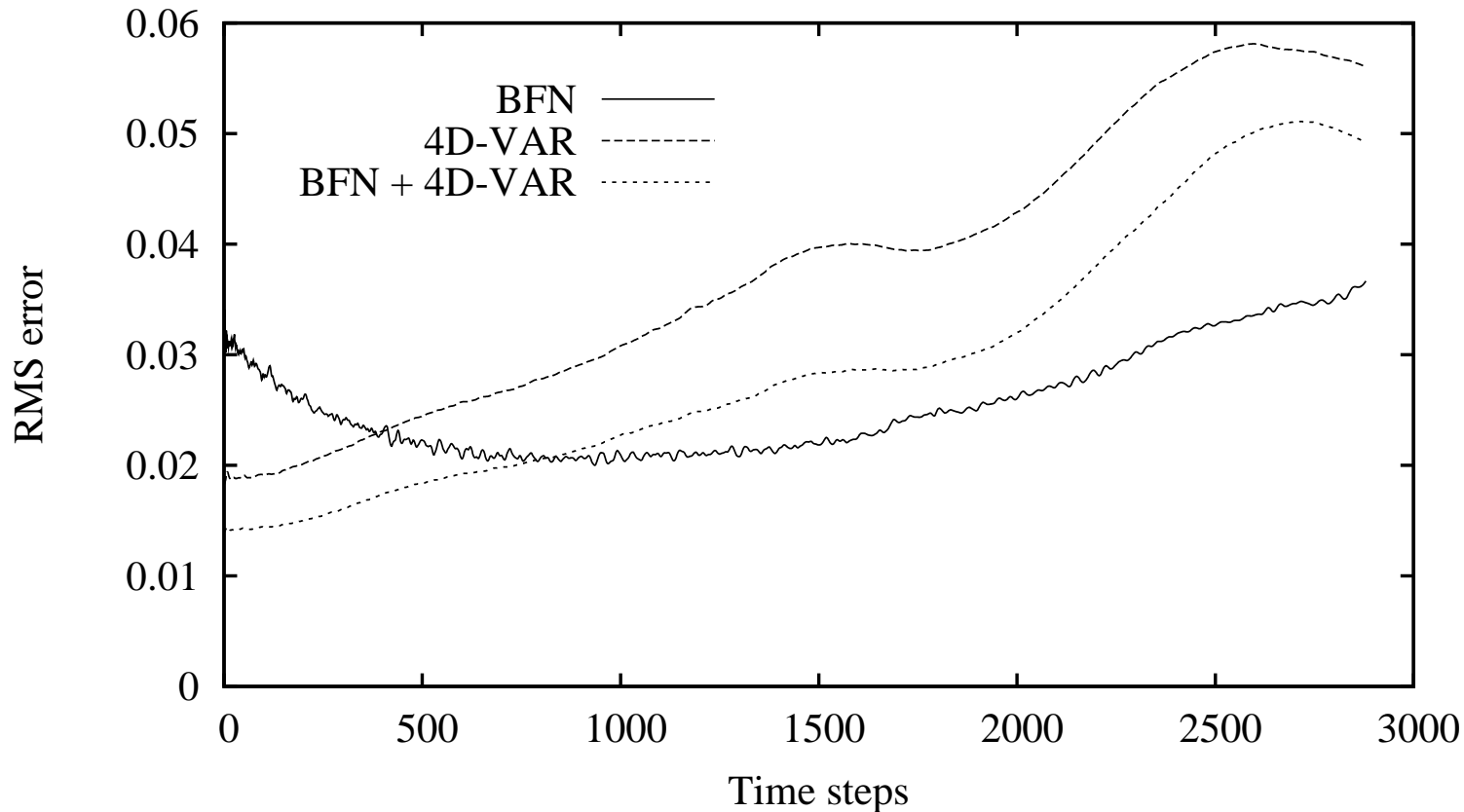
Erreur relative de l'ébauche et des différentes conditions initiales identifiées, pour les trois variables, dans le cas d'observations non bruitées.



Qualité des prévisions à convergence :

Différence relative entre la solution exacte et la trajectoire prédite (identifiée) par le **BFN** (haut, 5 itérations) et le **4D-VAR** (bas, 16 itérations), dans le cas d'**observations bruitées**.

Hybridation avec le 4D-VAR : amélioration des prévisions.



Différence relative entre la solution exacte et les trajectoires prédites correspondant aux conditions initiales identifiées par le BFN ($n_{iter} = 5$), le 4D-VAR ($n_{iter} = 5$), et le **4D-VAR préconditionné par le BFN** ($n_{iter} = 2 + 3$), dans le cas d'observations bruitées.



Conclusions



- **Simplicité** de la mise en œuvre (pas de linéarisation, pas d'état adjoint, pas de minimisation, pas de matrices énormes à considérer)
 - Très **efficace** dans les toutes **premières** itérations
 - **Converge** beaucoup plus vite que le 4D-VAR
 - **Coûts** de calcul et de mémoire **inférieurs** au 4D-VAR
 - Donne également de très bons résultats sur un modèle océanique quasi-géostrophique multi-couches
- ↔ excellent **préconditionneur** pour le 4D-VAR (ou pour une autre méthode d'assimilation de données)



- Estimations plus fines pour les équations non linéaires \rightsquigarrow bornes optimales sur les matrices K et K'
- Améliorer les performances grâce aux estimations théoriques
- Hybridation avec le filtre SEEK (filtre de Kalman étendu réduit évolutif)
- Tester l'algorithme sur un modèle aux équations primitives (modèle OPA), avec des observations réelles.



CONCLUSIONS GÉNÉRALES ET PERSPECTIVES



Conclusions :

- Développement et mise en œuvre de **nouveaux algorithmes**.
- Utilisation **facile** (peu de paramètres à régler, implémentation informatique rapide).
- Méthodes **rapides** et **efficaces**.

Perspectives :

- **Amélioration** des algorithmes présentés (choix des paramètres).
- **Nouvelles applications** (compression, défloutage en imagerie ; données réelles, estimation de paramètres en assimilation de données).
- **Interface** des deux thématiques.

