

Didier AUROUX

Laboratoire J. A. Dieudonné

Université de Nice Sophia-Antipolis

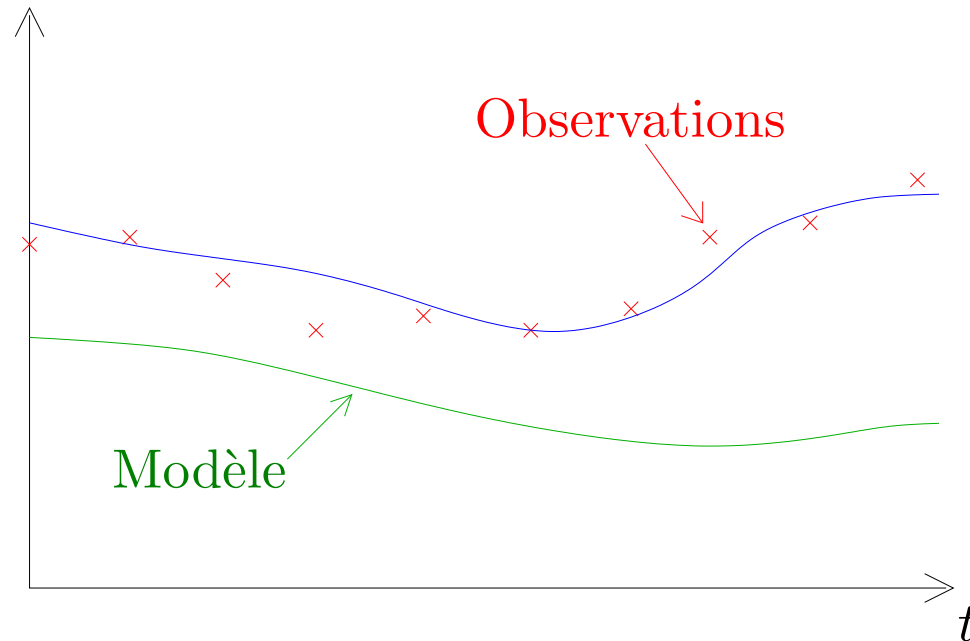
Étude de différentes méthodes
d'assimilation de données pour l'environnement

10 Décembre 2003

1. Qu'est-ce que l'assimilation de données ?
2. Minimisation
3. Quasi-réversibilité
 - (a) Présentation de la méthode
 - (b) Application à l'équation de la chaleur
4. Nudging
 - (a) Nudging direct
 - (b) Nudging rétrograde
5. Dualité
 - (a) Théorie linéaire
 - (b) Extension à un cadre non linéaire
 - (c) Résultats numériques

QU'EST-CE QUE L'ASSIMILATION DE DONNÉES ?

Assimilation de données



combinaison

modèle + observations

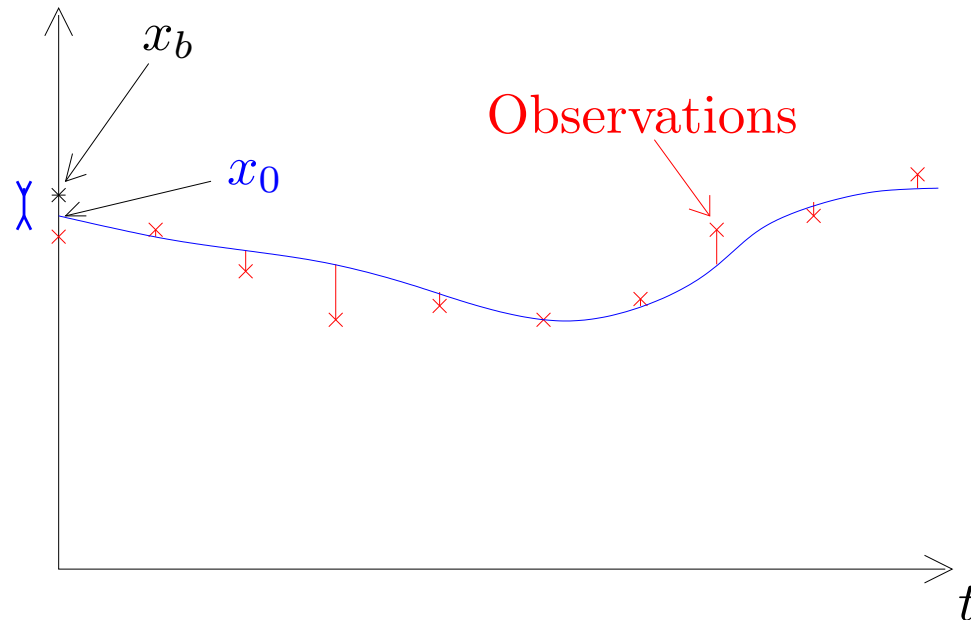


estimation de la condition initiale

état de l'écoulement

- Méthodes **séquentielles** (interpolation optimale, filtre de Kalman)
- Méthodes **variationnelles** (3D-VAR, 4D-VAR, 4D-PSAS)

4D-VAR



$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = F(x), \\ x(0) = x_0, \end{cases}$$

$(t_i)_{0 \leq i \leq n}$, les instants où des observations y_i sont disponibles, H_i les opérateurs d'observation correspondants et R_i leur matrice de covariance d'erreur.

$$J(x_0) = \frac{1}{2}(x_0 - x_b)^T B^{-1}(x_0 - x_b) + \frac{1}{2} \sum_{i=0}^n (y_i - H_i(x(t_i)))^T R_i^{-1} (y_i - H_i(x(t_i)))$$

Adjoint au premier ordre

Si on perturbe la condition initiale dans la direction h ,

$$\begin{cases} \frac{d \delta x}{dt} = [F'(x)] \delta x, \\ \delta x(0) = h. \end{cases}$$

$$\nabla J(x_0).h = (x_0 - x_b)^T B^{-1} h - \sum_{i=0}^n (y_i - H_i(x(t_i)))^T R_i^{-1} H'_i(x(t_i)) \delta x(t_i).$$

$$\begin{cases} -\frac{dp}{dt} = [F'(x)]^T p - \sum_{i=0}^n H'_i(x(t_i))^T R_i^{-1} (y_i - H_i(x(t_i))) \delta_{t_i}(t), \\ p(T) = 0. \end{cases}$$

$$\nabla J(x_0) = B^{-1}(x_0 - x_b) + p(0)$$

4D-PSAS (Physical Space Analysis System)

Erreur modèle : $x_{i+1} = M_i x_i + \varepsilon_i, \quad i \geq 0$

$$\begin{aligned}
 J(x_0, \varepsilon_0, \dots, \varepsilon_n) &= \frac{1}{2} (x_0 - x_b)^T B^{-1} (x_0 - x_b) \\
 &+ \frac{1}{2} \sum_{i=0}^n (y_i - H_i(x(t_i)))^T R_i^{-1} (y_i - H_i(x(t_i))) + \frac{1}{2} \sum_{i=0}^n \varepsilon_i^T Q_i^{-1} \varepsilon_i
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L}(\delta x_0, (\varepsilon_i)_{0 \leq i \leq n}, (\mathcal{Y}_i)_{0 \leq i \leq n}; (m_i)_{0 \leq i \leq n}) &= \frac{1}{2} \delta x_0^T B^{-1} \delta x_0 \\
 &+ \frac{1}{2} \sum_{i=0}^n (d_i - \mathcal{Y}_i)^T R_i^{-1} (d_i - \mathcal{Y}_i) + \frac{1}{2} \sum_{i=0}^n \varepsilon_i^T Q_i^{-1} \varepsilon_i \\
 &+ \sum_{i=0}^n [\mathcal{Y}_i - H_i(\mathcal{M}_i \delta x_0 + \tilde{\varepsilon}_i)] \cdot m_i
 \end{aligned}$$

où $d_i = y_i - H_i(x_b(t_i))$ et $\mathcal{Y}_i = H_i(\delta x(t_i))$.

$$\begin{aligned}
 \min_{\delta x_0, (\varepsilon_i)} J(x_0, (\varepsilon_i)_{0 \leq i \leq n}) &= \min_{\delta x_0, (\varepsilon_i)} \max_{(m_i)} \mathcal{L}(\delta x_0, (\varepsilon_i)_{0 \leq i \leq n}, (\mathcal{Y}_i)_{0 \leq i \leq n}; (m_i)_{0 \leq i \leq n}) \\
 &= \max_{(m_i)} \min_{\delta x_0, (\varepsilon_i)} \mathcal{L}(\delta x_0, (\varepsilon_i)_{0 \leq i \leq n}, (\mathcal{Y}_i)_{0 \leq i \leq n}; (m_i)_{0 \leq i \leq n}) = \max_{(m_i)} [-J_{\mathcal{D}}((m_i)_{0 \leq i \leq n})]
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 J_{\mathcal{D}}((m_i)_{0 \leq i \leq n}) &= \frac{1}{2} \sum_{i=0}^n [\mathcal{M}_i^T H_i^T m_i]^T B_i [\mathcal{M}_i^T H_i^T m_i] \\
 &+ \frac{1}{2} \sum_{i=0}^n m_i^T R_i m_i + \frac{1}{2} \sum_{i=0}^n [H_i^T m_i]^T Q_i [H_i^T m_i] - \sum_{i=0}^n d_i \cdot m_i
 \end{aligned}$$

$$J_{\mathcal{D}}(m) = \frac{1}{2} m^T (\mathcal{D} + R)m - d^T m$$

avec $\mathcal{D} = H M B M^T H^T + H Q H^T$ la matrice des représentants.

QUASI-RÉVERSIBILITÉ

Heuristique

$$(1) \begin{cases} \frac{du}{dt} + A(t)u = f, & 0 \leq t \leq T \\ u(0) = \xi, \end{cases} \quad \xi \setminus u(T) = \chi ?$$

$$(2) \begin{cases} \frac{du}{dt} + A(t)u = f, & 0 \leq t \leq T \\ u(T) = \chi \end{cases} \quad \text{est mal posé.}$$

$$(3) \begin{cases} \frac{du_\varepsilon}{dt} + A(t)u_\varepsilon - \varepsilon A^*(t)A(t)u_\varepsilon = f \\ u_\varepsilon(T) = \chi \end{cases} \quad \text{est bien posé}$$

$$(4) \begin{cases} \frac{dU_\varepsilon}{dt} + A(t)U_\varepsilon = f, & 0 \leq t \leq T \\ U_\varepsilon(0) = u_\varepsilon(0), \end{cases} \quad \text{A-t-on } U_\varepsilon(T) \rightarrow \chi \text{ lorsque } \varepsilon \rightarrow 0 ?$$

Justifications théoriques

$V \subset H \subset V'$, V un espace de Hilbert dense dans H , $A(t) \in \mathcal{L}(V; V')$

\hookrightarrow formes bilinéaires $a(t; u, v)$ sur V .

1. $\forall u, v \in V$, la fonction $t \rightarrow a(t; u, v)$ est mesurable.
2. a est uniformément continue sur $[0, T] \times V \times V$:

$$\exists M > 0 \text{ tel que } \forall t \in [0, T], \forall u, v \in V, |a(t; u, v)|_H \leq M \|u\|_V \cdot \|v\|_V .$$

3. a vérifie la propriété de coercivité élargie :

$$\exists \lambda > 0, \alpha > 0 \text{ tels que } a(t; v, v) + \lambda |v|_H^2 \geq \alpha \|v\|_V^2, \forall t \in [0, T], \forall v \in V.$$

Théorème 1 Soient $f \in L^2([0, T], V')$ et $\xi \in H$. Sous les hypothèses énoncées précédemment sur a , il existe une unique solution u de (1) avec $u \in L^2([0, T], V)$ et $\frac{du}{dt} \in L^2([0, T], V')$. ■

$$D(A(t)) = \{v \in V; A(t)v \in H\}.$$

Théorème 2 *Sous les hypothèses du théorème précédent, en supposant en outre que $D(A(t))$ est un espace indépendant de t , alors le problème (3) admet une unique solution u_ε avec $u_\varepsilon \in L^2([0, T], D(A(t)))$ et $\frac{du_\varepsilon}{dt} \in L^2([0, T], D(A(t)))$. ■*

Théorème 3 *Sous les hypothèses du théorème précédent, en supposant de plus que la forme bilinéaire a est indépendante du temps et symétrique (i.e. A auto-adjoint), alors $U_\varepsilon(T) \rightarrow \chi$ dans H lorsque $\varepsilon \rightarrow 0$, $U_\varepsilon \in L^2([0, T], V)$ étant défini par (3). ■*

Application à l'équation de la chaleur

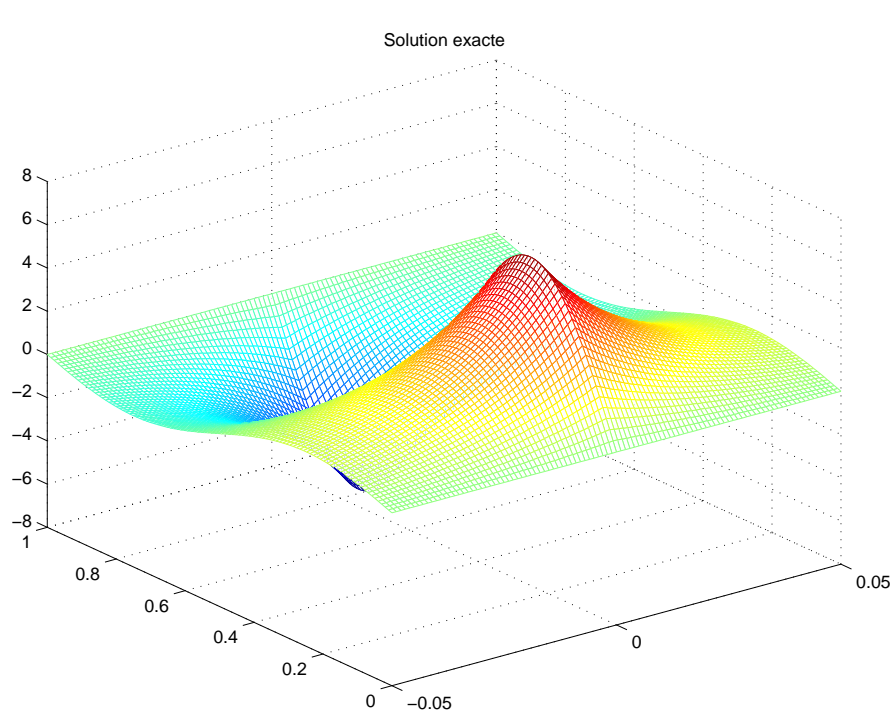
$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \quad x \in \Omega =]0, 1[, t \in [0, T] \\ u(0, t) = u(1, t) = 0, \quad t \in]0, T[\\ u(x, 0) = \xi(x), \quad x \in \Omega, \end{array} \right.$$

est instable en rétrograde.

\Rightarrow quasi-réversibilité : $t' = T - t$

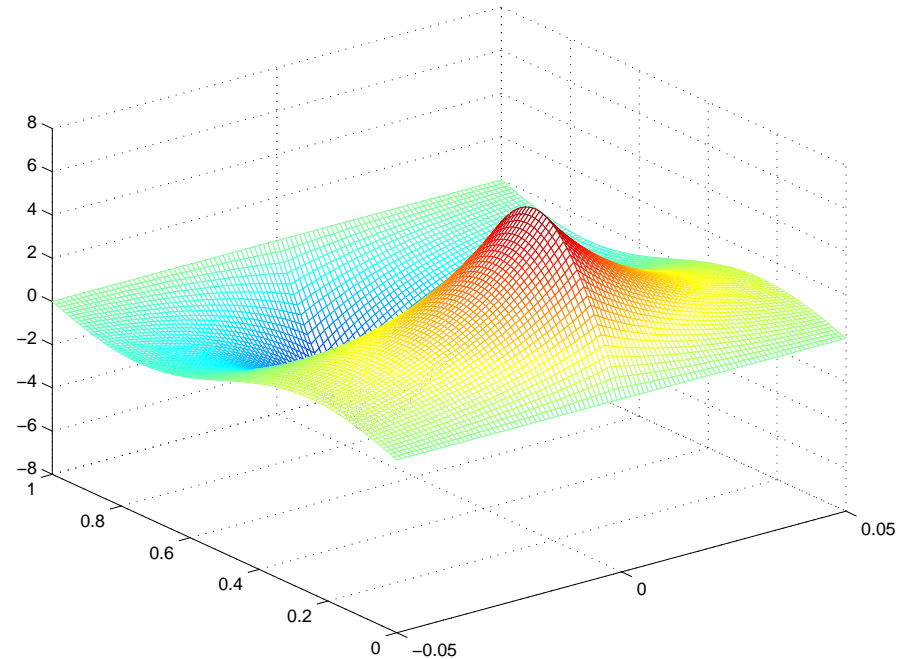
$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial t'} + \frac{\partial^2 u_\varepsilon}{\partial x^2} + \varepsilon \frac{\partial^4 u_\varepsilon}{\partial x^4} = 0, \quad x \in \Omega, t' \in [0, T], \varepsilon > 0, \\ u_\varepsilon(x, t') = 0, \quad x \in \partial\Omega, t' \in]0, T[\\ \Delta u_\varepsilon(x, t') = 0, \quad x \in \partial\Omega, t' \in]0, T[\\ u_\varepsilon(x, 0) = \chi(x), \quad x \in \Omega. \end{array} \right.$$

$$T = 0.05, \chi(x) = \sin(2\pi x).$$



Solution exacte

ndx = 100, ndt = 50, dt = 0.001, eps = 0.00044
 $\text{Max}(x_{\text{final}} - x_{\text{initial}}) = 0.033694 - \text{Max}(x - \text{solution exacte}) = 0.23916$

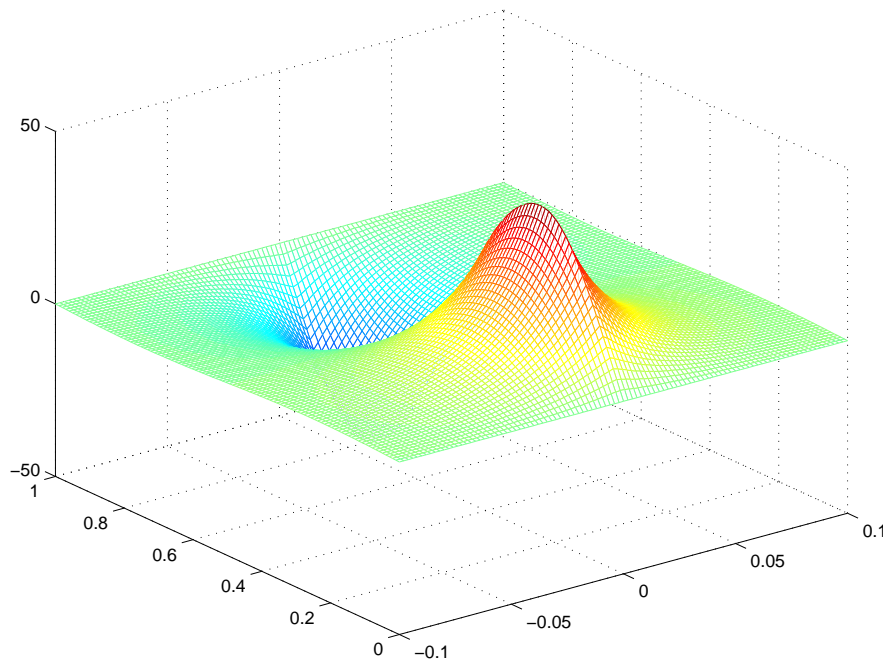


Solution numérique; $\varepsilon = 4.4 \cdot 10^{-4}$

Erreur sur la condition finale : $\sim 3\%$

$T = 0.1$

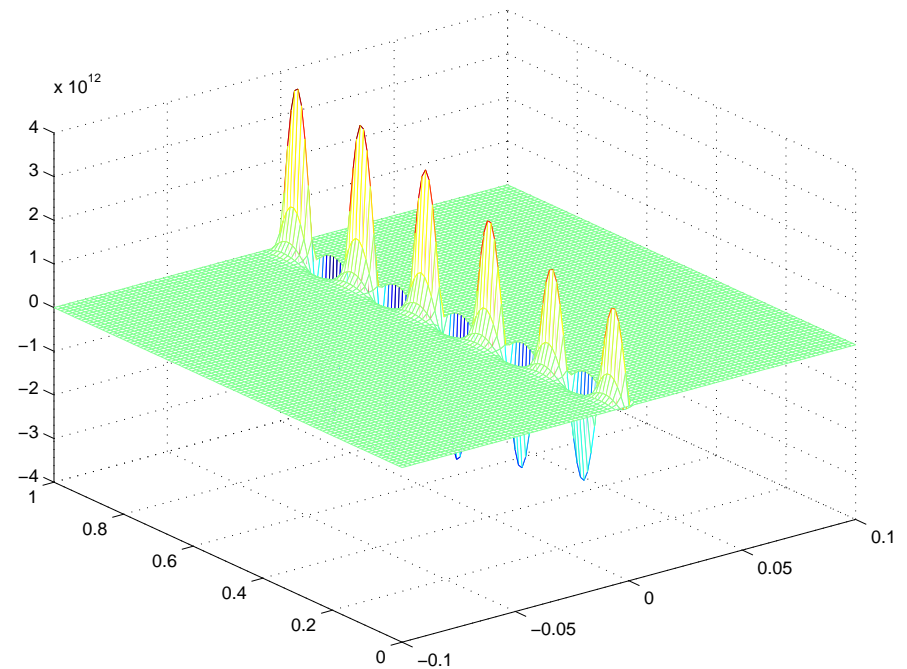
$ndx = 100, ndt = 50, dt = 0.002, eps = 0.00083$
 $\text{Max}(x_{\text{final}} - x_{\text{initial}}) = 0.12143 - \text{Max}(x - \text{solution exacte}) = 6.5248$



$$\varepsilon = 8.3 \cdot 10^{-4}$$

Erreur sur la condition finale : $\sim 12\%$

$ndx = 100, ndt = 50, dt = 0.002, eps = 0.00045$
 $\text{Max}(x_{\text{final}} - x_{\text{initial}}) = 0.073449 - \text{Max}(x - \text{solution exacte}) = 3784065581049.09$



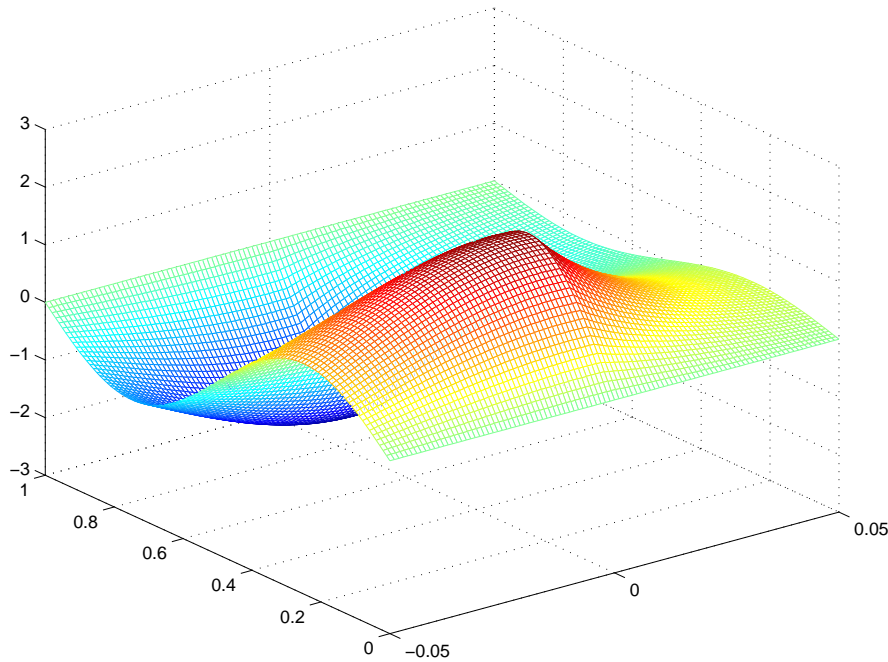
$$\varepsilon = 4.5 \cdot 10^{-4}$$

$\sim 7\%$

Quasi-réversibilité en temps :

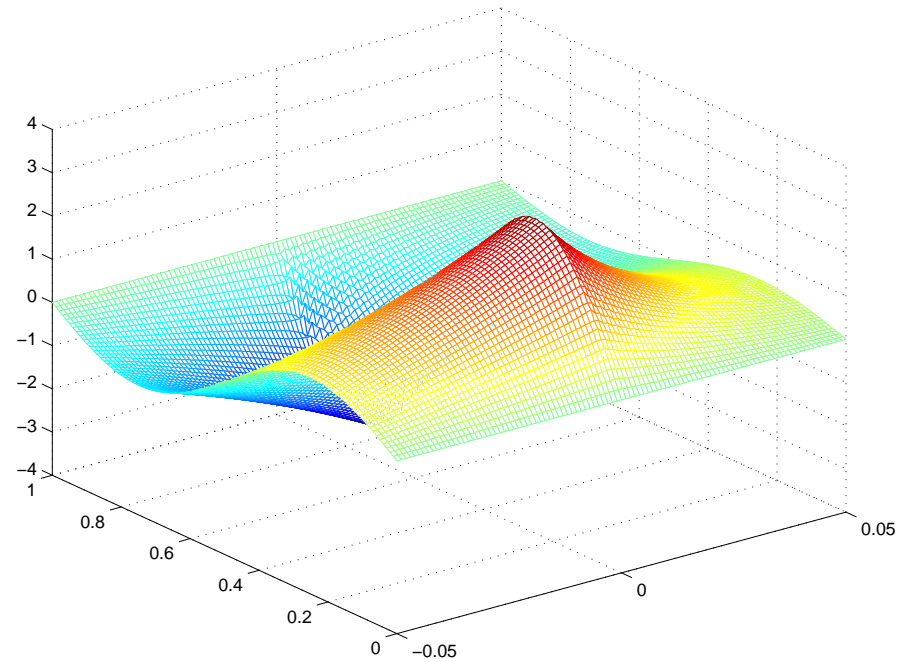
$$\varepsilon \frac{\partial^2 u_\varepsilon}{\partial t^2} - \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial t} = \frac{\partial^2 u_\varepsilon}{\partial x^2}.$$

ndx = 100, ndt = 50, dt = 0.001, eps = 0.05
 Max(x_{final} - x_{initial}) = 0.69407 - Max(x - solution exacte) = 4.9973



$\varepsilon > 0$

ndx = 100, ndt = 50, dt = 0.001, eps = -0.1
 Max(x_{final} - x_{initial}) = 0.545 - Max(x - solution exacte) = 3.9376



$\varepsilon < 0$

NUDGING

Nudging direct

$$\frac{dX}{dt} = F(X).$$

Sur $[0, T]$, observations d'une partie du système $X_{obs}(t_0), X_{obs}(t_1), \dots, X_{obs}(t_N) \in \mathbb{R}^p$, avec $t_0 = 0, t_i = t_0 + ih$ et $t_N = t_0 + Nh = T$.

Opérateur d'observation C de \mathbb{R}^n dans \mathbb{R}^p .

$$\frac{dX}{dt} = F(X) + \sum_{i=0}^N K(X_{obs}(t_i) - CX(t_i)) \cdot \delta(t - t_i)$$

Exemple linéaire :

$$\frac{dX}{dt} = FX + K(X_{obs} - X)$$

$$\hookrightarrow X(t) = \left(I - e^{-t(K-F)} \right) (K - F)^{-1} K X_{obs} + e^{-t(K-F)} X_0$$

Comparaison avec le filtre de Kalman :

$$\frac{dX}{dt} = FX + K(X_{obs} - X)$$

$$\frac{X_{n+1}^a - X_n^a}{t_{n+1} - t_n} = F_n X_n^a + K_{n+1}(X_{obsn+1} - X_{n+1}^f)$$

On a alors

$$X_{n+1}^f = X_n^a + (t_{n+1} - t_n)F_n X_n^a$$

et

$$X_{n+1}^a = X_{n+1}^f + K_{n+1}(X_{obsn+1} - X_{n+1}^f)$$

Nudging rétrograde

Changement de variable $t' = T - t$:

$$-\frac{dX}{dt'} = F(X)$$

Réécriture sous la forme :

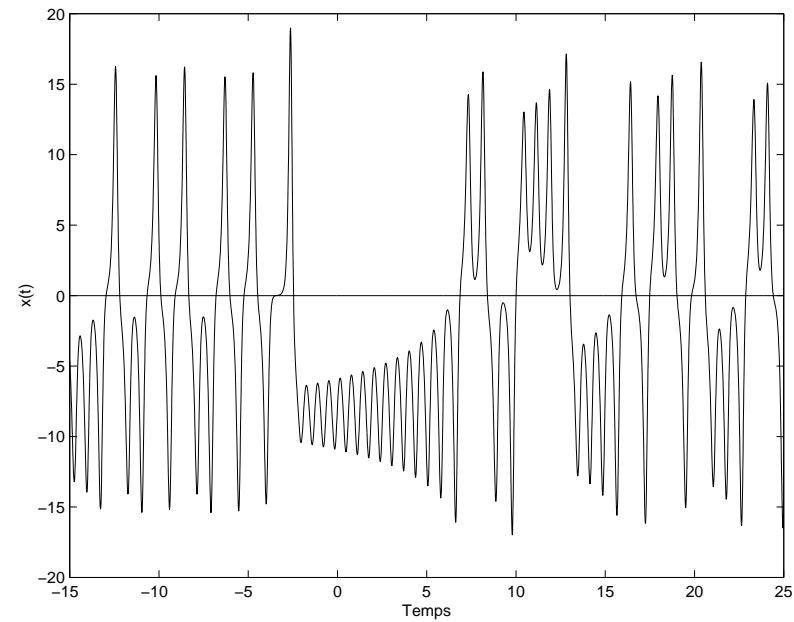
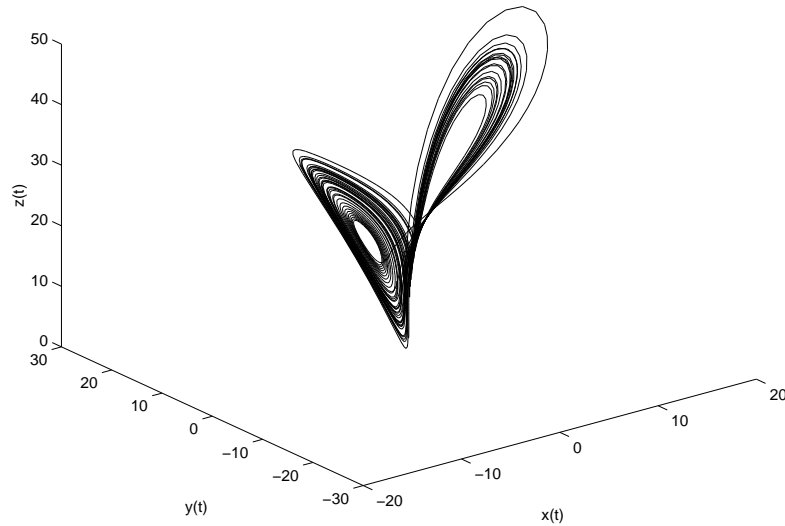
$$\frac{dX}{dt'} = -F(X)$$

Nudging appliqué à l'équation rétrograde :

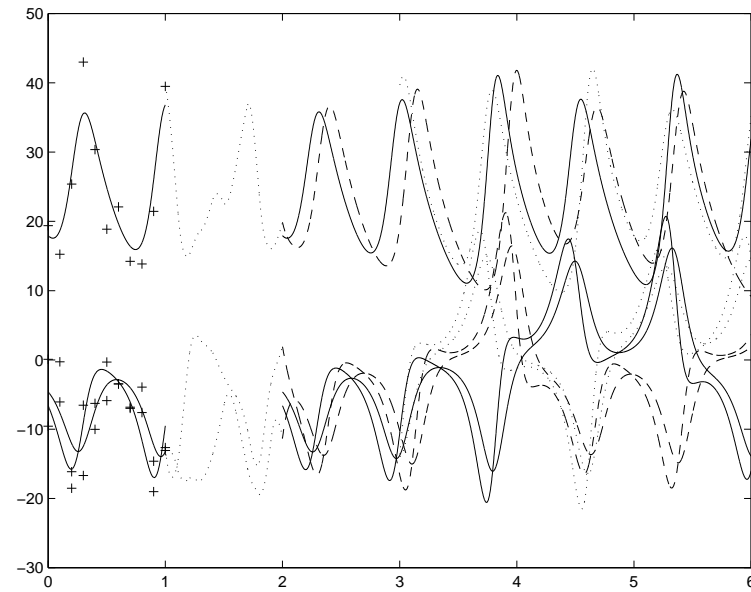
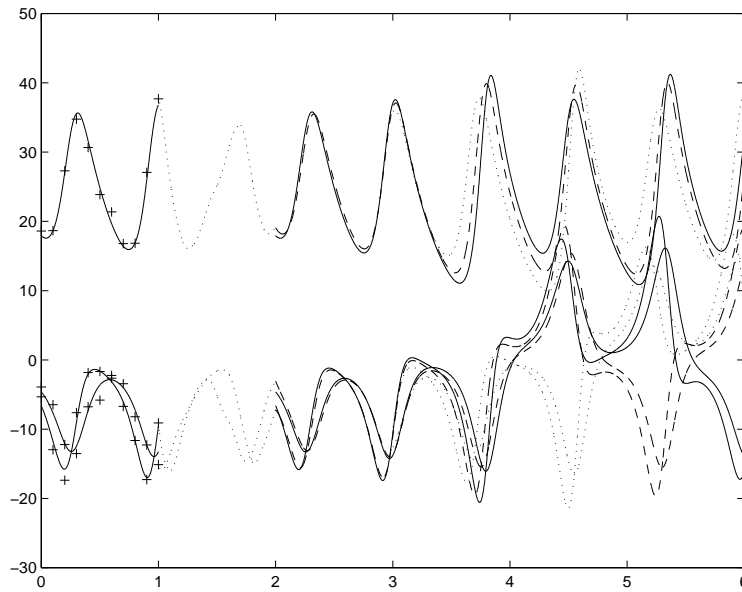
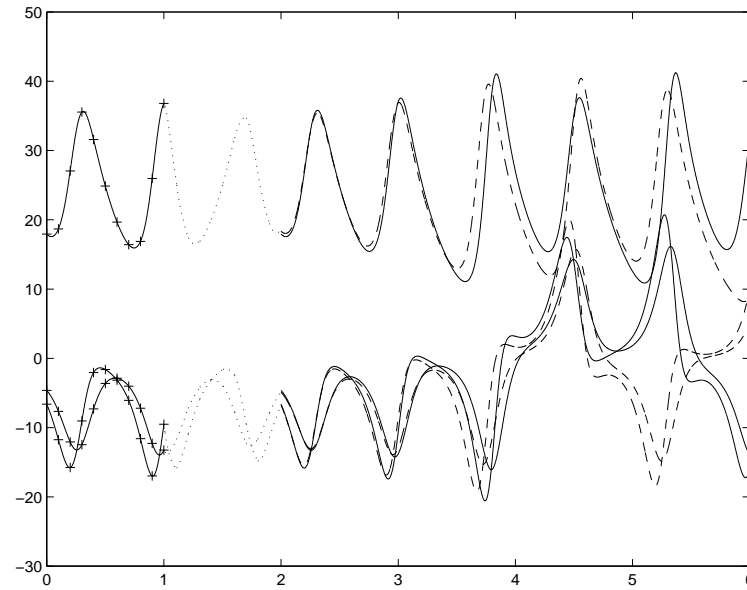
$$\frac{dX}{dt'} = -F(X) + \sum_{i=0}^N K(X_{obs}(t_i) - CX(t_i)) \cdot \delta(t' - t_i)$$

Système de Lorenz

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dx}{dt} = \sigma(y - x), \\ \frac{dy}{dt} = \rho x - y - xz, \\ \frac{dz}{dt} = \beta z + xy, \end{array} \right. \quad \sigma = 10, \quad \rho = 28, \quad \beta = \frac{3}{8}$$



Nudging



DUALITÉ

Méthode primale pour un modèle linéaire

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} + A(t)x = f + v, \\ x(0) = x_0 + u, \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{J}(u, v) &= \frac{1}{2} \sum_{i=0}^N \langle R_i^{-1} (H_i x(t_i) - y_i), H_i x(t_i) - y_i \rangle \\ &+ \frac{1}{2} \langle P_0^{-1} u, u \rangle + \frac{1}{2} \int_0^T \langle Q^{-1} v(t), v(t) \rangle dt. \end{aligned}$$

$$\begin{cases} -\frac{dp}{dt} + A(t)^T p = \sum_{i=0}^N H_i^T R_i^{-1} (y_i - H_i x(t_i)) \delta(t - t_i), \\ p(T) = 0, \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
 \nabla \mathcal{J}(u, v) \cdot \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} &= -\langle p(0), h_1 \rangle - \int_0^T \langle p(t), h_2(t) \rangle dt \\
 &\quad + \langle P_0^{-1} u, h_1 \rangle + \int_0^T \langle Q^{-1} v(t), h_2(t) \rangle dt
 \end{aligned}$$

On a alors le système d'optimalité suivant, d'inconnues (\hat{x}, \hat{p}) :

$$\begin{cases} \frac{d\hat{x}}{dt} + A(t)\hat{x} = f + Q\hat{p}, \\ \hat{x}(0) = x_0 + P_0\hat{p}(0), \end{cases}$$

et

$$\begin{cases} -\frac{d\hat{p}}{dt} + A(t)^T \hat{p} = \sum_{i=0}^N H_i^T R_i^{-1} (y_i - H_i \hat{x}(t_i)) \delta(t - t_i), \\ \hat{p}(T) = 0. \end{cases}$$

Approche duale

$$\begin{cases} \frac{d\tilde{x}}{dt} + A(t)\tilde{x} = f, \\ \tilde{x}(0) = x_0. \end{cases}$$

$$y = \begin{pmatrix} y_0 \\ \vdots \\ y_N \end{pmatrix}, \quad Hx = \begin{pmatrix} H_0x(t_0) \\ \vdots \\ H_Nx(t_N) \end{pmatrix}, \quad d = y - H\tilde{x}$$

On choisit un vecteur m dans l'espace des observations.

$$\begin{cases} -\frac{dp_m}{dt} + A(t)^T p_m = \sum_{i=0}^N H_i^T m_i \delta(t - t_i), \\ p_m(T) = 0, \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{dx_m}{dt} + A(t)x_m = Qp_m, \\ x_m(0) = P_0p_m(0), \end{cases}$$

$$\mathcal{D}m = Hx_m$$

Proposition 1 *L'opérateur \mathcal{D} agissant sur l'espace des observations est linéaire symétrique défini positif. De plus, si on note \hat{m} la solution de*

$$(\mathcal{D} + R)\hat{m} = d,$$

alors

$$\hat{m} = R^{-1}(y - H\hat{x}) \quad \text{et} \quad \hat{x} = \tilde{x} + x_{\hat{m}}.$$

Théorème 4 *En posant $u_m = x_m(0)$ et $v_m = Qp_m$, on peut redéfinir la fonctionnelle primale \mathcal{J} comme étant une fonction de m uniquement :*

$$\mathcal{J}(m) = \mathcal{J}(u_m, v_m) = \frac{1}{2}\langle \mathcal{D}m, m \rangle + \frac{1}{2}\langle R^{-1}(\mathcal{D}m - d), \mathcal{D}m - d \rangle.$$

On a alors

$$\min_m \mathcal{J}(m) = \max_m (-\mathcal{J}_{\mathcal{D}}(m)) = -\min_m \mathcal{J}_{\mathcal{D}}(m) = \frac{1}{2}\langle (\mathcal{D} + R)^{-1}d, d \rangle.$$

De plus, les minima sont réalisés au même point m .

Application au modèle quasi-géostrophique barocline :

$$k = 1 : \quad \frac{D_1 (\theta_1(\Psi) + f)}{Dt} - \beta \Delta^2 \Psi_1 = F_1 \quad \text{dans } \Omega \times]0, T[;$$

$$2 \leq k \leq n - 1 : \quad \frac{D_k (\theta_k(\Psi) + f)}{Dt} - \beta \Delta^2 \Psi_k = 0 \quad \text{dans } \Omega \times]0, T[;$$

$$k = n : \quad \frac{D_n (\theta_n(\Psi) + f)}{Dt} + \alpha \Delta \Psi_n - \beta \Delta^2 \Psi_n = 0 \quad \text{dans } \Omega \times]0, T[.$$

- * Ψ_k la fonction de courant dans la couche k ,
- * $\theta_k(\Psi) = \Delta \Psi_k - (W\Psi)_k$,
- * ρ_k la densité du fluide dans la couche k , h_k la hauteur de la couche k ,
- * $\frac{D_k}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + J(\Psi_k, \cdot)$ désigne la dérivée particulière Lagrangienne,
- * $\alpha \Delta \Psi_n$ représente la dissipation par frottement au fond du bassin et $\beta \Delta^2 \Psi_k$ la dissipation par friction latérale dans chaque couche k .

Vecteur de contrôle : $u = (\Psi_k(0))_{k=1\dots n}$.

Observations en surface uniquement.

$$\mathcal{J}(u) = \frac{1}{2} \sum_{i=0}^N \langle R_i^{-1} (H_i \Psi_1(t_i) - \Psi_1^{obs}(t_i)), H_i \Psi_1(t_i) - \Psi_1^{obs}(t_i) \rangle + \frac{1}{2} \langle P_0^{-1} u, u \rangle.$$

$$\frac{\partial \theta_1^T(\Lambda)}{\partial t} - \Delta J(\Psi_1, \Lambda_1) - (W^T J(\Psi, \Lambda))_1 - J(\Lambda_1, \theta_1(\Psi) + f) - \beta \Delta^2 \Lambda_1 = E_1$$

$$\frac{\partial \theta_k^T(\Lambda)}{\partial t} - \Delta J(\Psi_k, \Lambda_k) - (W^T J(\Psi, \Lambda))_k - J(\Lambda_k, \theta_k(\Psi) + f) - \beta \Delta^2 \Lambda_k = 0$$

$$\frac{\partial \theta_n^T(\Lambda)}{\partial t} - \Delta J(\Psi_n, \Lambda_n) - (W^T J(\Psi, \Lambda))_n - J(\Lambda_n, \theta_n(\Psi) + f) + \alpha \Delta \Lambda_n - \beta \Delta^2 \Lambda_n = 0$$

avec Λ_k les fonctions de courant adjointes

$$\text{et } E_1(t) = \sum_{i=0}^N H_i^T R_i^{-1} (H_i \Psi_1(t) - \Psi_1^{obs}(t)) \delta(t - t_i).$$

Algorithme dual non linéaire :

Soit m un vecteur d'observations qui peut être relié directement à Ψ_1 .

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \theta_1^T(\Lambda)}{\partial t} - \Delta J(\Psi_1, \Lambda_1) - (W^T J(\Psi, \Lambda))_1 - J(\Lambda_1, \theta_1(\Psi) + f) - \beta \Delta^2 \Lambda_1 = \tilde{E}_1(m) \\ \frac{\partial \theta_k^T(\Lambda)}{\partial t} - \Delta J(\Psi_k, \Lambda_k) - (W^T J(\Psi, \Lambda))_k - J(\Lambda_k, \theta_k(\Psi) + f) - \beta \Delta^2 \Lambda_k = 0 \\ \frac{\partial \theta_n^T(\Lambda)}{\partial t} - \Delta J(\Psi_n, \Lambda_n) - (W^T J(\Psi, \Lambda))_n - J(\Lambda_n, \theta_n(\Psi) + f) + \alpha \Delta \Lambda_n - \beta \Delta^2 \Lambda_n = 0 \end{array} \right.$$

avec les conditions finales $\Lambda_k(T) = 0$, $1 \leq k \leq n$, et

$$\tilde{E}_1(m)(t) = \sum_{i=0}^N H_i^T R_i^{-1} (m(t) - \Psi_1^{obs}(t)) \delta(t - t_i).$$

$$\begin{aligned}
 k = 1 & : \quad \frac{D_1 (\theta_1(\Psi) + f)}{Dt} - \beta \Delta^2 \Psi_1 = F_1 + (Q\Lambda)_1; \\
 2 \leq k \leq n - 1 & : \quad \frac{D_k (\theta_k(\Psi) + f)}{Dt} - \beta \Delta^2 \Psi_k = (Q\Lambda)_k; \\
 k = n & : \quad \frac{D_n (\theta_n(\Psi) + f)}{Dt} + \alpha \Delta \Psi_n - \beta \Delta^2 \Psi_n = (Q\Lambda)_n.
 \end{aligned}$$

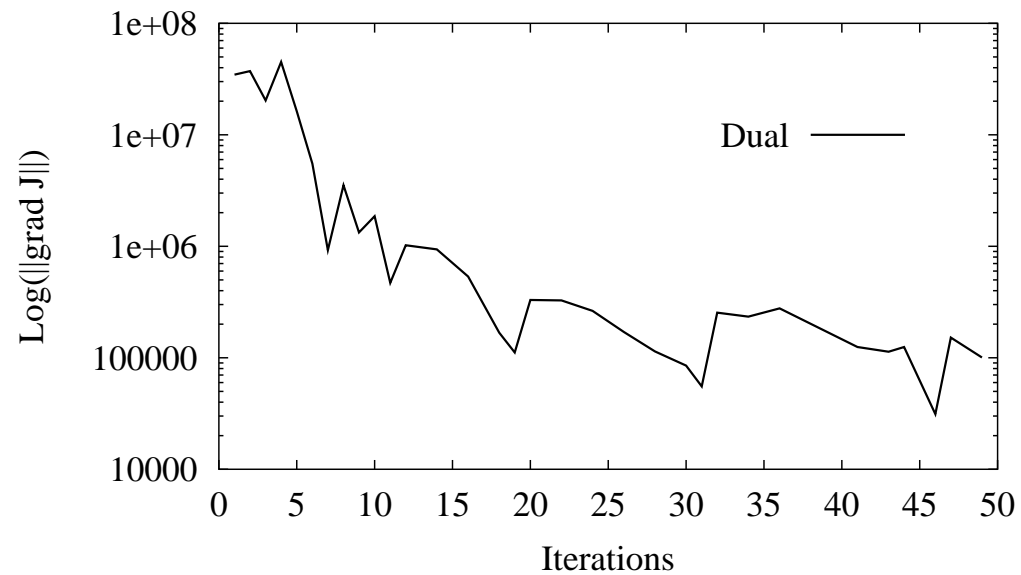
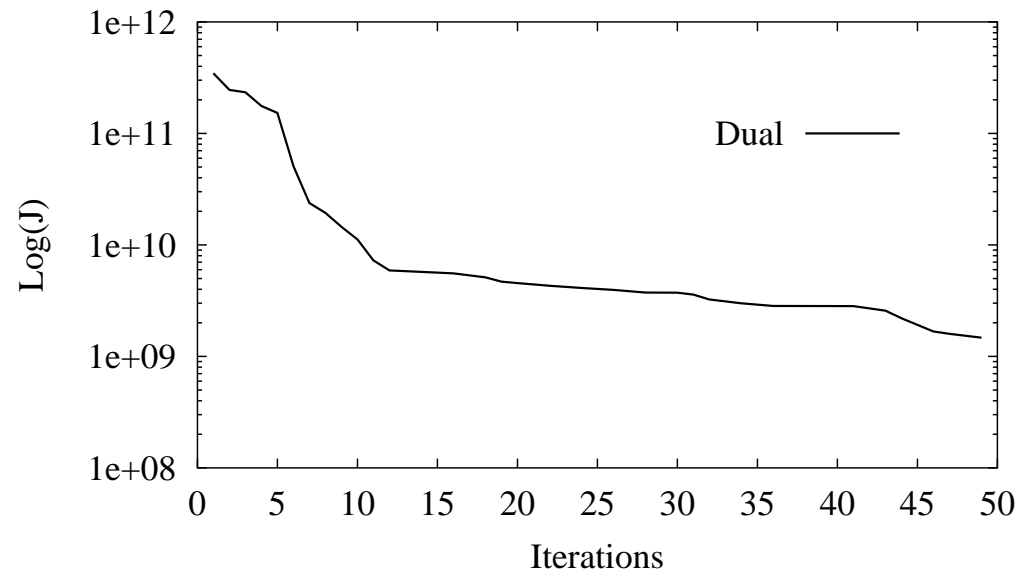
avec les conditions initiales $\Psi_k(0) = \Psi_k^e(0) + (P_0 \Lambda(0))_k$.

La trajectoire obtenue servira de nouvelle ébauche du système pour la prochaine itération.

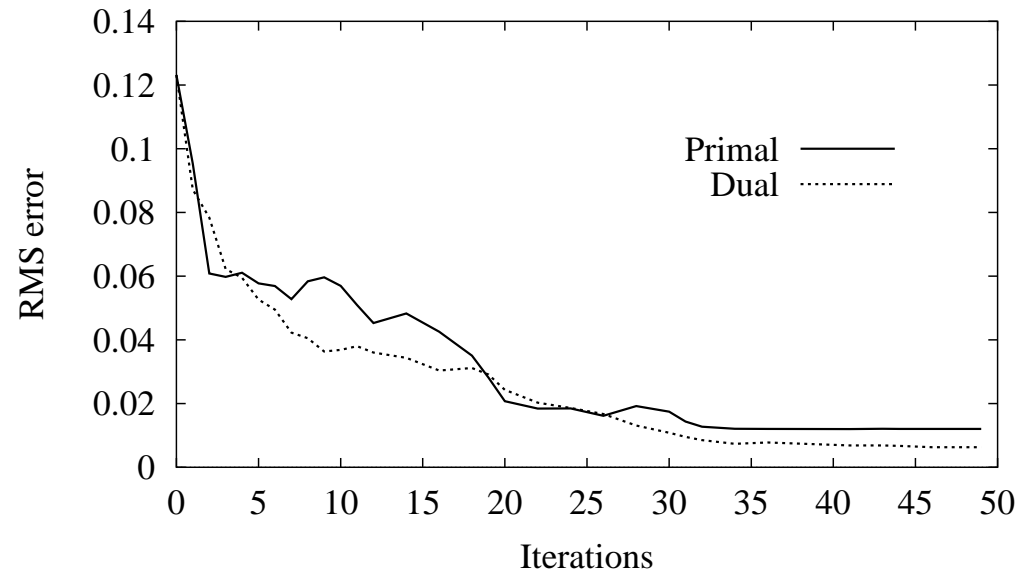
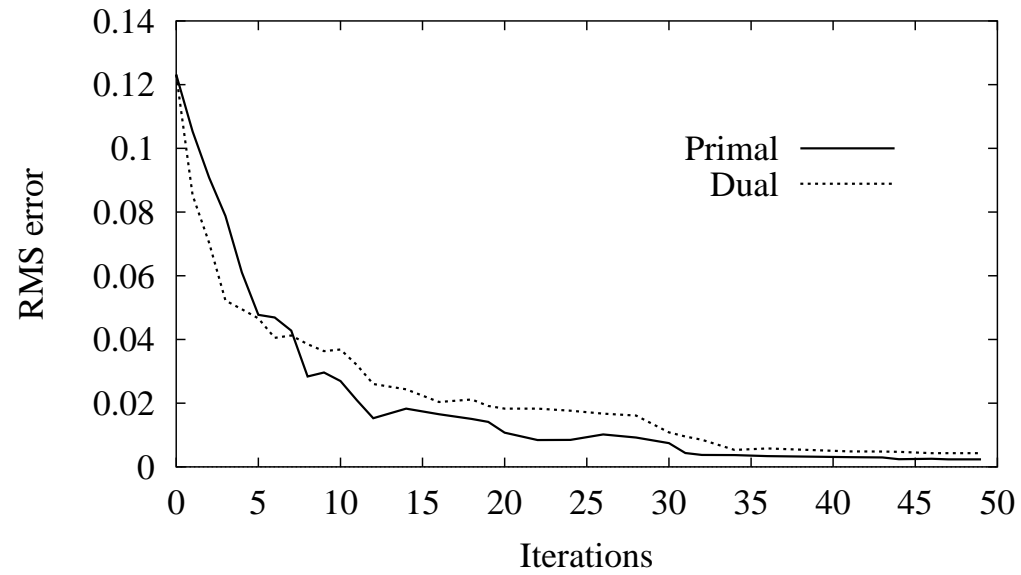
$$(\mathcal{D}m)(t) = \sum_{i=0}^N H_i \Psi_1(t_i) \delta(t - t_i),$$

$$\mathcal{J}_{\mathcal{D}}(m) = \frac{1}{2} \langle \mathcal{D}m, m \rangle - \langle \Psi_1^{obs}, m \rangle \quad \text{et} \quad \nabla \mathcal{J}_{\mathcal{D}}(m) = \mathcal{D}m - \Psi_1^{obs}.$$

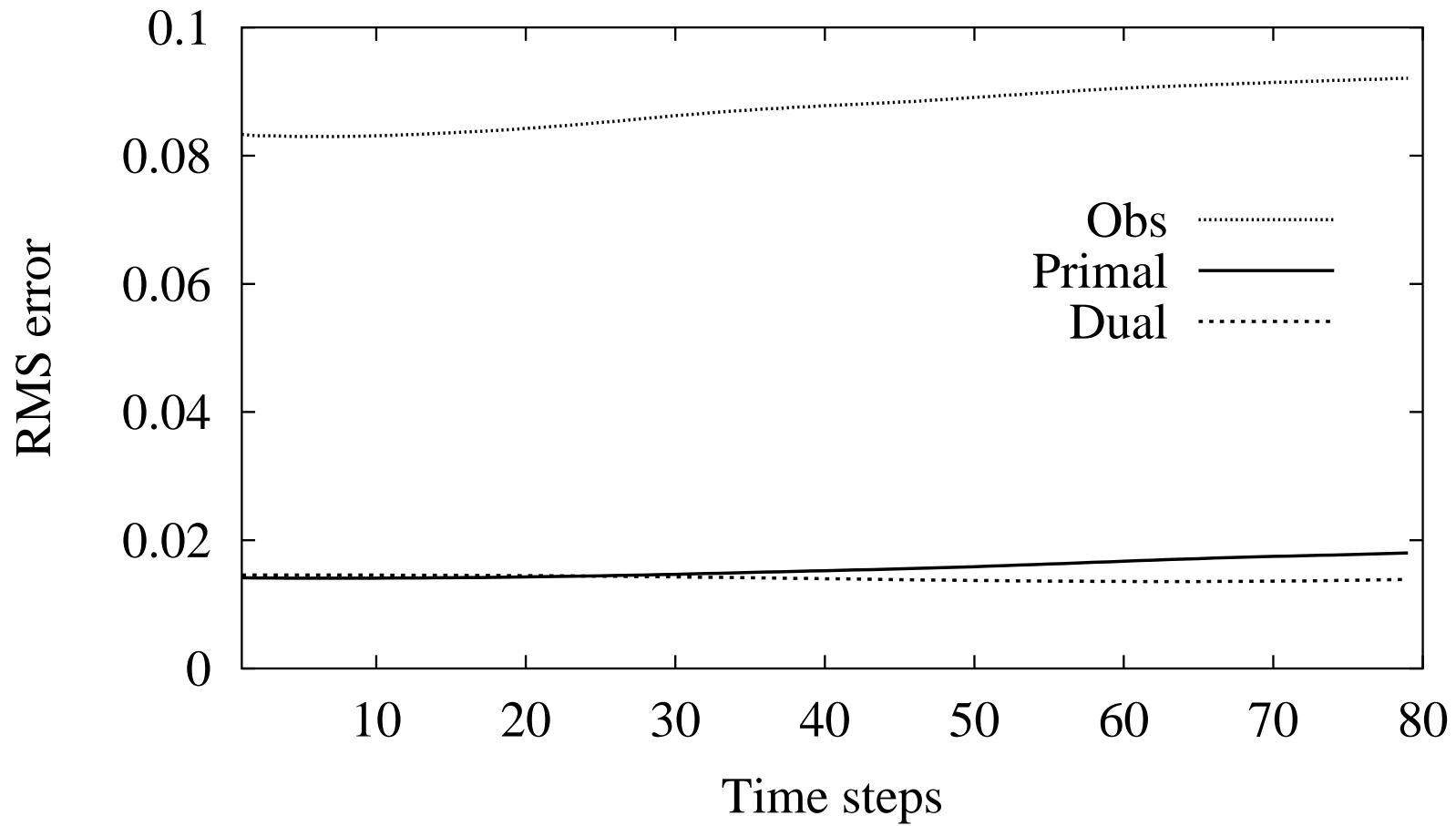
Convergence de la méthode duale



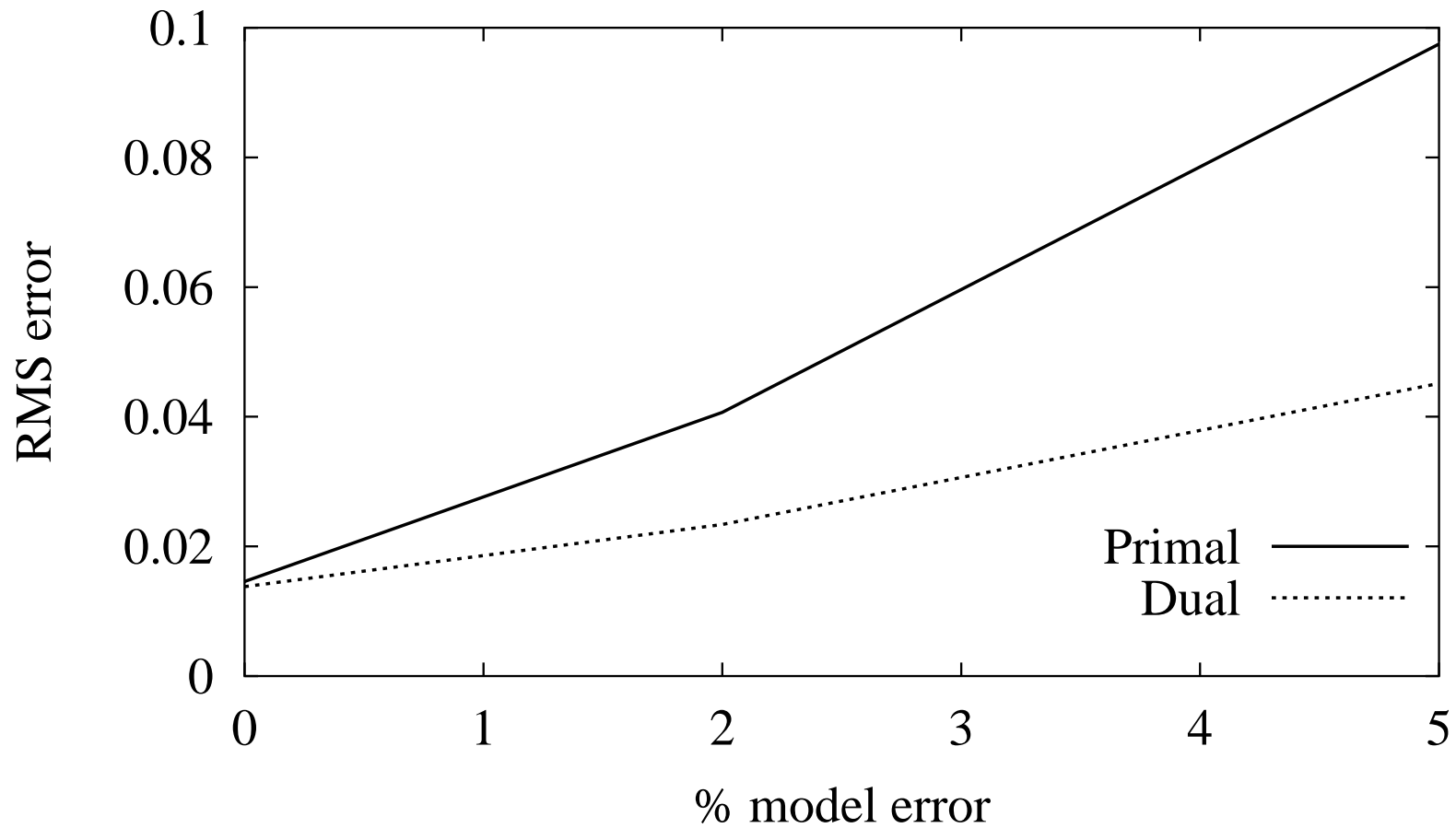
Comparaison avec la méthode primale



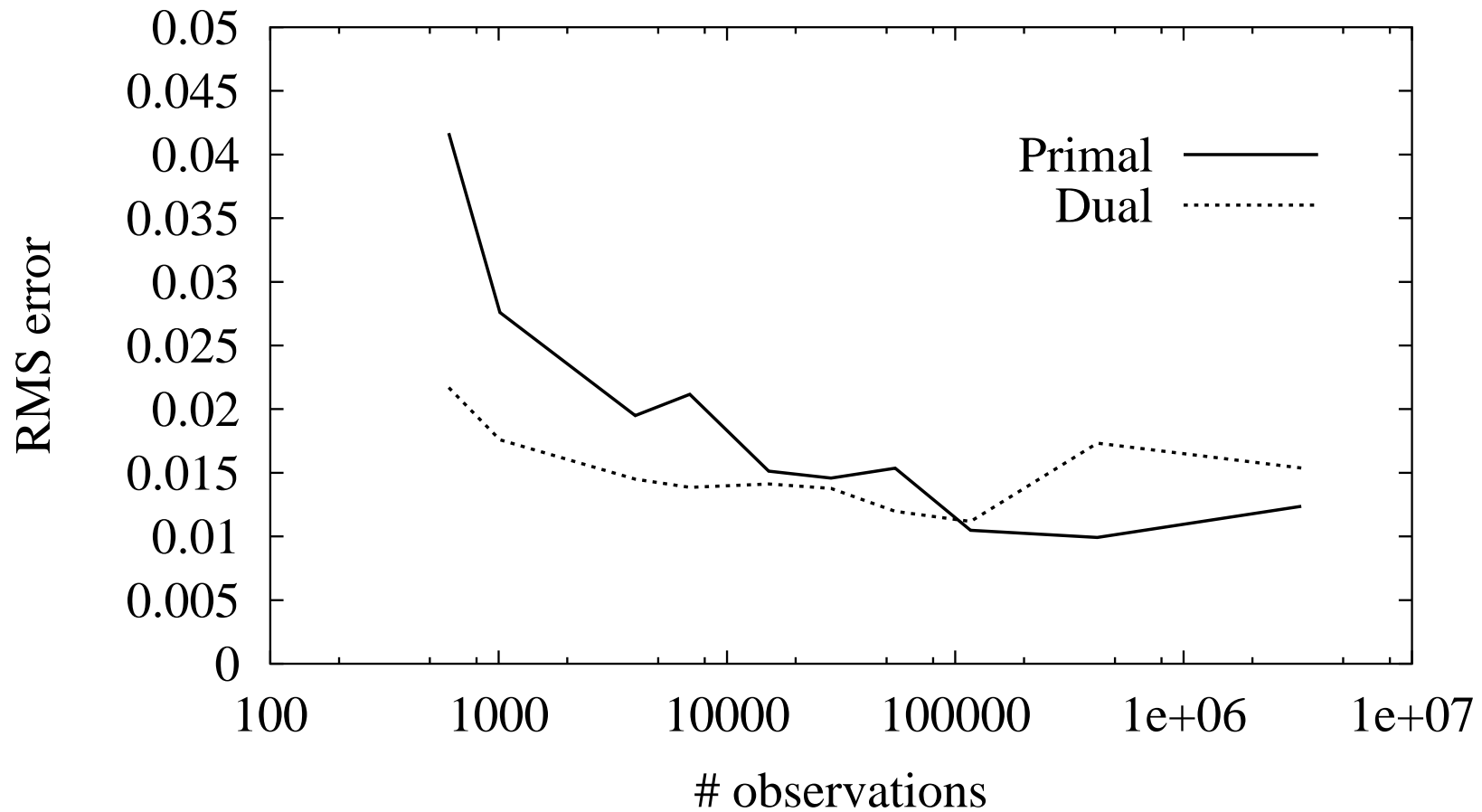
Reconstitution de l'état initial et prévisions



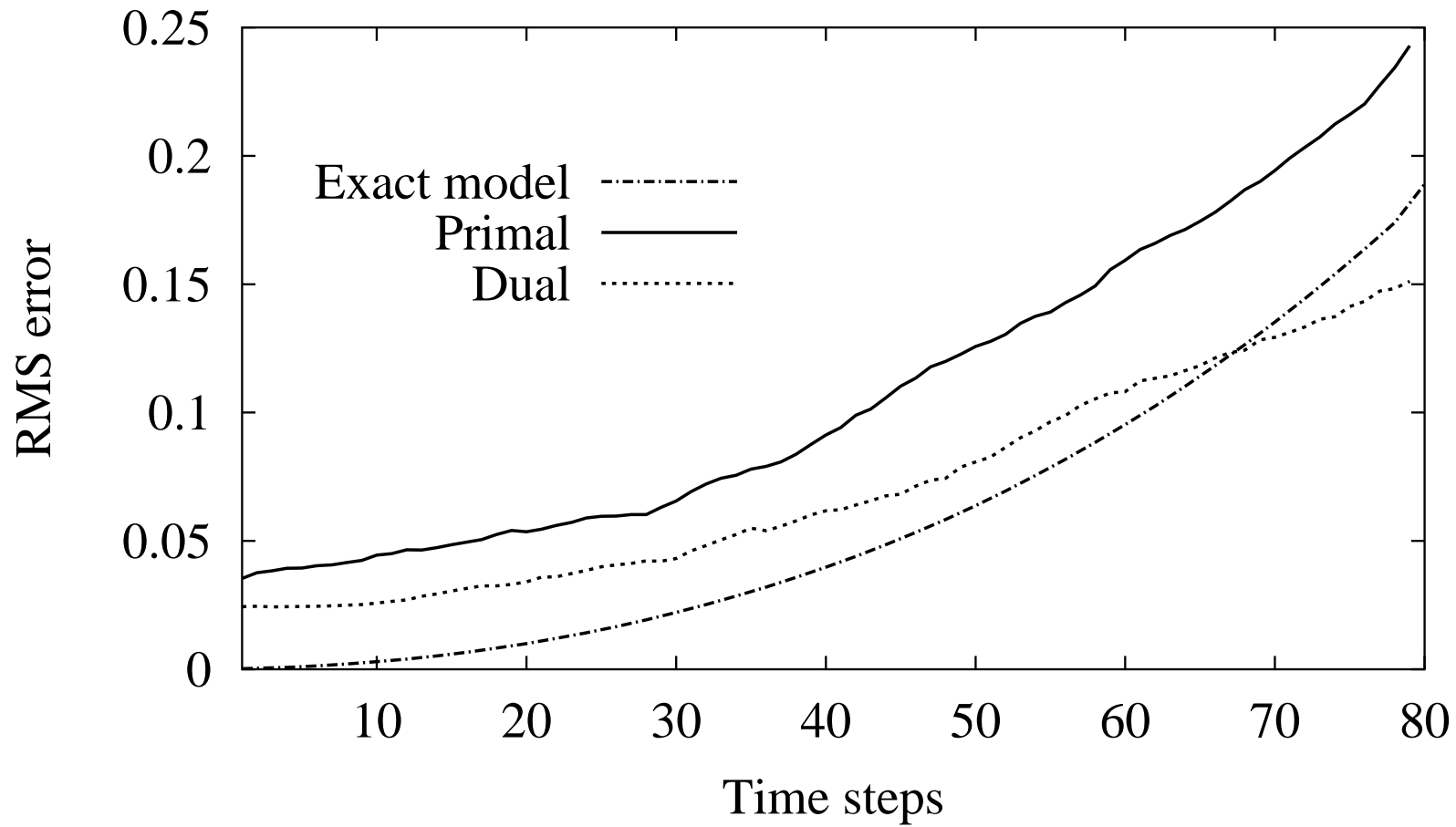
Sensibilité à une erreur dans le modèle au cours de l'assimilation



Sensibilité au nombre d'observations



Détection de l'erreur modèle



Conclusions sur la méthode duale

- * Perte d'équivalence des méthodes en non linéaire
- * Méthode duale moins sensible à la perturbation du modèle
- * Moindre efficacité lorsque le problème est sur-déterminé
- * Détection partielle de l'erreur modèle, contrairement à la méthode primale

- * La quasi-réversibilité ne semble pas adaptée en pratique
- * Le nudging rétrograde donne des résultats satisfaisants de façon très rapide
- * La méthode duale étendue à un cas non linéaire présente de nombreux avantages

... et perspectives

- ↪ Robustesse de la méthode duale ?
- ↪ Autres extensions à des cas non linéaires ?
- ↪ Mise en œuvre opérationnelle ?
- ↪ Autres méthodes d'assimilation de données ???

Interpolation Optimale (OI)

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = F(x), \\ x(0) = x_0, \end{cases}$$

ébauche x_b de l'état x , ébauche y_b de l'observation y du système,

BLUE (Best Linear Unbiased Estimator) :

$$x_a - x_b = E \left((x - x_b)(y - y_b)^T \right) \cdot E \left((y - y_b)(y - y_b)^T \right)^{-1} \cdot (y - y_b).$$

H opérateur d'observation, $y_b = Hx_b$,

$$B = E \left((x - x_b)^T (x - x_b) \right), R = E \left((y - y_b)^T (y - y_b) \right)$$

$$x_a = x_b + BH^T (HBH^T + R)^{-1} \cdot (y - Hx_b).$$

Approche variationnelle :

$$J(x) = \frac{1}{2}(x - x_b)^T B^{-1}(x - x_b) + \frac{1}{2}(y - Hx)^T R^{-1}(y - Hx).$$

H linéaire $\implies J$ strictement convexe

$$\nabla J(x_a) = B^{-1}(x_a - x_b) - H^T R^{-1}(y - Hx_a) = 0$$

$$x_a = x_b + BH^T (HBH^T + R)^{-1} \cdot (y - Hx_b)$$

Filtre de Kalman

$$\begin{cases} x_0 \text{ donné,} \\ x_{n+1} = M_n x_n + \varepsilon_n, \quad n \geq 0, \end{cases} \quad y_n = H_n x_n + o_n,$$

Q_n et R_n les matrices de covariance des erreurs de modèle et d'observation.

$$x_n^f = M_{n-1} x_{n-1}^a$$

P_n^f et P_n^a les matrices de covariance d'erreur d'ébauche et d'analyse

$$P_{n+1}^f = E \left((x_{n+1}^f - x_{n+1})^T (x_{n+1}^f - x_{n+1}) \right) = M_n P_n^a M_n^T + Q_n$$

$$x_{n+1}^a = x_{n+1}^f + K_{n+1} (y_{n+1} - H_{n+1} x_{n+1}^f)$$

$$K_{n+1} = P_{n+1}^f H_{n+1}^T \left(H_{n+1} P_{n+1}^f H_{n+1}^T + R_{n+1} \right)^{-1}$$

$$P_{n+1}^a = P_{n+1}^f - K_{n+1} H_{n+1} P_{n+1}^f$$

3D-VAR

$$J(x) = \frac{1}{2}(x - x_b)^T B^{-1}(x - x_b) + \frac{1}{2}(y - H(x))^T R^{-1}(y - H(x)),$$

où B et R sont les matrices de covariance d'erreur sur la condition initiale et les observations

$$\nabla J(x) = B^{-1}(x - x_b) - H^T R^{-1}(y - H(x)).$$

$$\nabla^2 J(x) = B^{-1} + H^T R^{-1} H,$$

3D-VAR incrémental

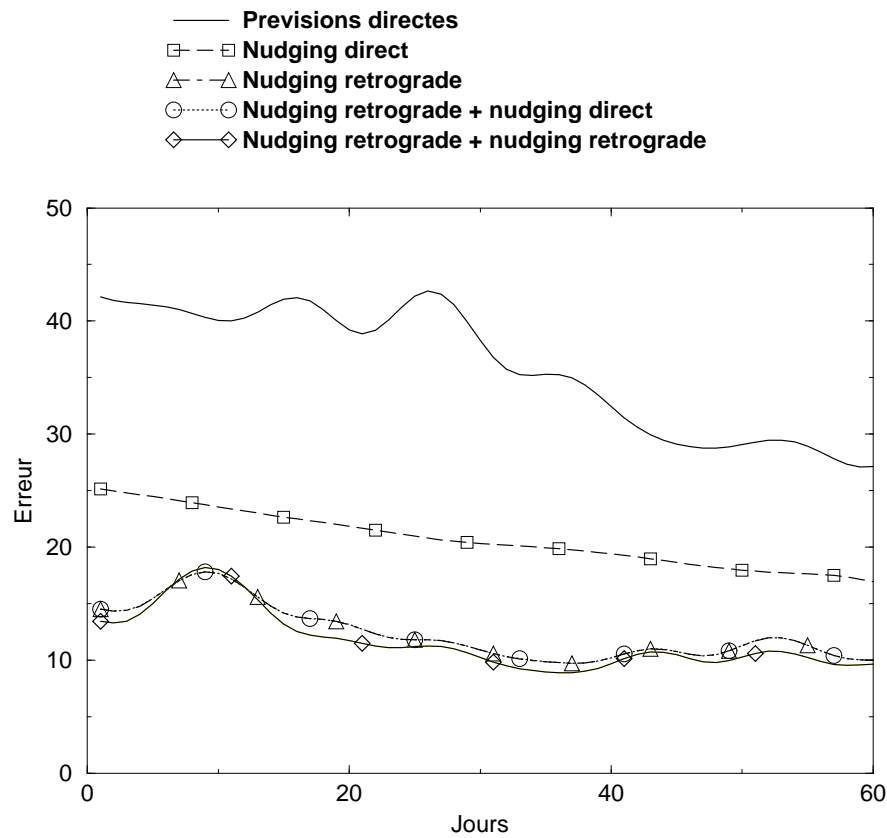
$$\delta x = x - x_b$$

$$J(\delta x) = \frac{1}{2}\delta x^T B^{-1}\delta x + \frac{1}{2}(d - H(\delta x))^T R^{-1}(d - H(\delta x))$$

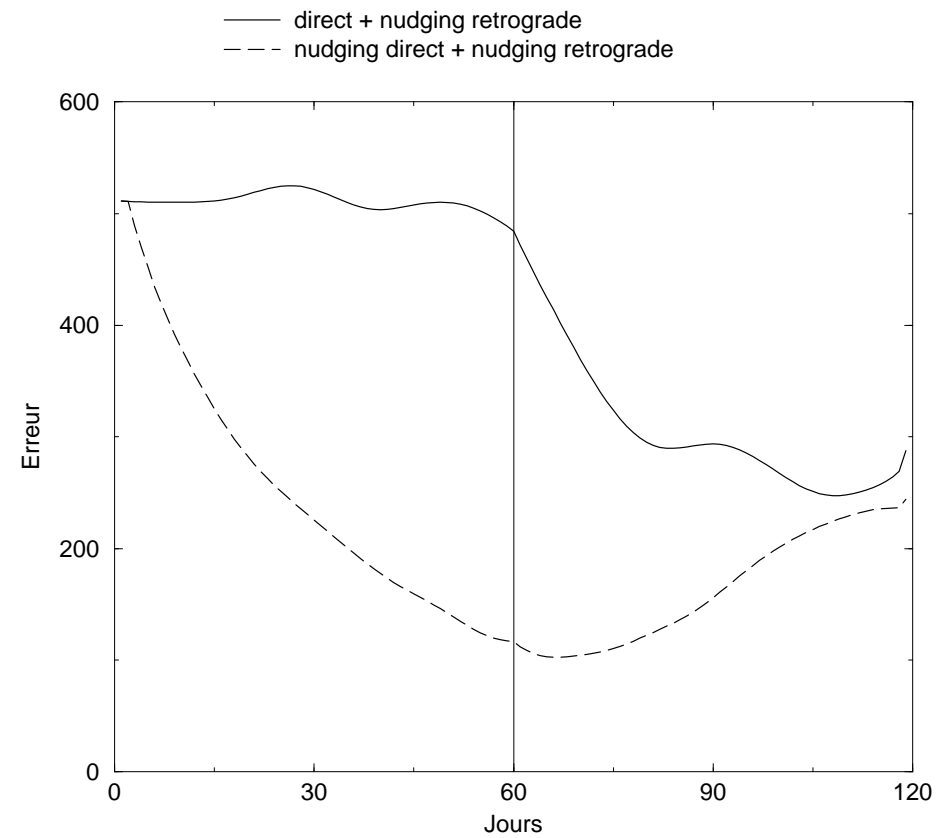
où d est le vecteur d'innovation $y - H(x_b)$.

Modèle quasi-géostrophique barotrope

Prévisions



Reconstitution de l'état initial



Résultats numériques

