L3 – Cours de géométrie

I. Géométrie affine

1. Définitions

$$\text{Espace affine} = \begin{cases} \text{ensemble de points } \mathrm{E} \\ \\ \text{espace vectoriel (réel) } \vec{\mathrm{E}} \end{cases} + \text{ application } \varphi : \begin{cases} \mathrm{E} \times \mathrm{E} \to \vec{\mathrm{E}} \\ (\mathrm{A}, \mathrm{B}) \mapsto \overrightarrow{\mathrm{AB}} \end{cases}$$

vérifiant la relation de Chasles, plus $\mathrm{M} \mapsto \overrightarrow{\mathrm{AM}}$ bijective $\forall \mathrm{A} \in \mathrm{E}$.

Conséquences: $\overrightarrow{\mathrm{AA}} = 0$, $\overrightarrow{\mathrm{BA}} = -\overrightarrow{\mathrm{AB}}$.

2. Sous-espaces affines

Définition. Propriété fondamentale: F sous-espace affine de direction $\vec{\mathrm{F}} \subset \vec{\mathrm{E}}$, $\mathrm{A} \in \mathrm{F} \;\Rightarrow$

$$\mathrm{M} \in \mathrm{F} \iff \overrightarrow{\mathrm{AM}} \in \vec{\mathrm{F}}$$

Un sous-espace affine est uniquement déterminé par un de ses points et sa direction. Intersection de sous-espaces affines. Sous-espaces affines parallèles.

3. Repère affine, coordonnées cartésiennes

Proposition : $\dim \mathrm{E} = n$, $\mathrm{A}_0, \ldots, \mathrm{A}_n \in \mathrm{E}$. Propriétés équivalentes:

a) $\mathrm{A}_0, \ldots, \mathrm{A}_n$ ne sont pas contenus dans un sous-espace affine $\neq \mathrm{E}$;

b) $\overrightarrow{\mathrm{A}_0\mathrm{A}_1}, \ldots, \overrightarrow{\mathrm{A}_0\mathrm{A}_n}$ base de $\vec{\mathrm{E}}$.

On dit alors que $(\mathrm{A}_0, \ldots, \mathrm{A}_n)$ est un repère affine.

Coordonnées d'un point M (dans ce repère) = coordonnées de $\overrightarrow{\mathrm{A}_0\mathrm{M}}$. Exemples de calculs: équations d'une droite, d'un plan.

2ème semaine

4. Barycentres

Proposition : $\mathrm{A}_1, \ldots, \mathrm{A}_p \in \mathrm{E}$, $a_1, \ldots, a_p \in \mathbb{R}$, $\sum a_i \neq 0$. Il existe $\mathrm{G} \in \mathrm{E}$ unique tel que $\sum a_i \overrightarrow{\mathrm{GA}_i} = 0$; quel que soit $\mathrm{O} \in \mathrm{E}$, on a $(\sum a_i)\overrightarrow{\mathrm{OG}} = \sum_i a_i \overrightarrow{\mathrm{OA}_i}$.

Exemples: milieu d'un segment, centre de gravité d'un triangle.

Proposition : $(\mathrm{A}_0, \ldots, \mathrm{A}_n)$ repère affine; quel que soit $\mathrm{M} \in \mathrm{E}$, il existe $a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ ("coordonnées barycentriques") uniques tels que:

$$\mathrm{M} = \mathrm{Bar}((\mathrm{A}_0, a_0), \ldots, (\mathrm{A}_n, a_n)) \qquad \text{et} \qquad \sum a_i = 1 .$$

5. Applications affines

Définition: $u : \mathrm{E} \to \mathrm{F}$ affine s'il existe $\vec{u} : \vec{\mathrm{E}} \to \vec{\mathrm{F}}$ linéaire telle que $\overrightarrow{u(\mathrm{A})u(\mathrm{B})} = \vec{u}(\overrightarrow{\mathrm{AB}})$ $\forall \mathrm{A}, \mathrm{B} \in \mathrm{E}$. Il suffit de le vérifier pour un A fixé.

Étant donnés $\vec{u} : \vec{\mathrm{E}} \to \vec{\mathrm{F}}$ linéaire et $\mathrm{A} \in \mathrm{E}$, $\mathrm{A}' \in \mathrm{F}$, il existe une unique $u : \mathrm{E} \to \mathrm{F}$ affine telle que $u(\mathrm{A}) = \mathrm{A}'$.

Exemples : application constante; translations; homothéties; projection (dans un plan, sur une droite parallèlement à une direction donnée).

Écriture matricielle dans des repères affines : $\mathrm{X} \mapsto \mathrm{AX} + \mathrm{B}$.

Proposition : L'image d'un sous-espace affine de E, et l'image réciproque d'un sous-espace affine de F, sont des sous-espaces affines.

3ème semaine

Proposition : Une application affine préserve les barycentres.

Proposition : La composée de deux applications affines est affine. u affine est bijective $\iff$ $\vec{u}$ bijective; si c'est le cas, u^{-1} est affine, d'application linéaire associée $(\vec{u})^{-1}$.

Corollaire : Les applications affines bijectives de E dans E ($=$ automorphismes de E) forment un groupe $\mathrm{GA(E)}$, le groupe affine de E.

Homomorphisme $\varphi : \mathrm{GA(E)} \to \mathrm{GL}(\vec{\mathrm{E}})$, surjectif, noyau $\mathcal{T}(\mathrm{E}) =$ groupe des translations de E, isomorphe à $\vec{\mathrm{E}}$.

Proposition : Soit $\mathrm{O} \in \mathrm{E}$. Tout automorphisme de E est composé d'une translation et d'un automorphisme fixant O.

Le sous-groupe $\mathrm{GA^O(E)}$ de $\mathrm{GA(E)}$ qui fixe O est isomorphe (par φ) à $\mathrm{GL}(\vec{\mathrm{E}})$.

Proposition : L'ensemble des homothéties et des translations de E est un sous-groupe de $\mathrm{GA(E)}$.

4ème semaine

6. Applications

Théorème de Thalès (et réciproque), théorème de Pappus – cf. M. Audin.

7. Convexité

Définition du segment AB. Définition d'une partie convexe d'un espace affine E.

Proposition : 1) Toute intersection de parties convexes est convexe.

2) L'image et l'image réciproque d'une partie convexe par une application affine sont convexes.

Définition de l'enveloppe convexe (grâce à 1)).

Proposition : L'enveloppe convexe de S est l'ensemble des barycentres de points de S à coefficients positifs.

II. Géométrie euclidienne

1. Rappels sur les espaces vectoriels euclidiens

Définitions: produit scalaire, norme, e.v. euclidiens. Existence de bases orthonormales (sans démonstration). Orthogonalité, orthogonal $\mathrm{F}^{\perp}$ d'un s.e.v F. Propriétés (sans démonstration): $\mathrm{V} = \mathrm{F} \oplus \mathrm{F}^{\perp}$, $(\mathrm{F}^{\perp})^{\perp} = \mathrm{F}$, orthogonal de $\mathrm{F} \cap \mathrm{G}$ et $\mathrm{F} + \mathrm{G}$.

5ème semaine

Isométries d'un espace euclidien. Groupe $\mathrm{O}(\mathrm{V}), \mathrm{SO}(\mathrm{V})$. Expression dans une base orthonormale; groupes $\mathrm{O}(n), \mathrm{SO}(n)$.

Exemples:

– symétries orthogonales. Une isométrie u avec $u^2 = \mathrm{I}$ est une symétrie orthogonale.

– Rotations: dans le plan, dans l'espace.

2. Isométries du plan euclidien

Proposition : Une isométrie du plan est une rotation ($\det = 1$) ou une symétrie par rapport à une droite ($\det = -1$).

Corollaire : Une isométrie du plan est un produit de 2 réflexions.

Les groupes $\mathrm{O}(2), \mathrm{SO}(2)$. Isomorphismes $\mathrm{SO}(2) \cong \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$. Dépendance de l'orientation.

6ème semaine

Étant donnés deux vecteurs $\vec{u}, \vec{v}$ de même longueur $(\neq 0)$, il existe une unique rotation appliquant $\vec{u}$ sur $\vec{v}$ $\rightarrow$ angle de deux vecteurs (dans un plan orienté). Une isométrie directe préserve les angles.

3. Isométries de l'espace

Rotations dans l'espace à 3 dimensions: axe et angle. Cas des demi-tours.

Proposition : Une isométrie directe est une rotation; une isométrie indirecte est composée de $-\mathrm{I}$ et d'une rotation.

Corollaire : Une isométrie de l'espace est produit d'au plus 3 réflexions.

Espace de dimension quelconque :

Théorème de structure: dans une base orthonormale convenable,

$$\mathrm{M}(u) = \begin{pmatrix} \pm 1 & & & & & \\ & \pm 1 & & & & \\ & & \ddots & & & \\ & & & \mathrm{R}_{\alpha_1} & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & \mathrm{R}_{\alpha_p} \end{pmatrix} \quad , \quad \text{où} \ \ \mathrm{R}_\alpha = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \ .$$

Corollaire : Dans un espace euclidien de dimension n, une isométrie est produit d'au plus n réflexions.

Partiel

1) Soit E un plan affine, $\mathrm{A,B,C,D}$ quatre points de E, $\mathrm{M,N,P,Q}$ les milieux de $\mathrm{AB,BC,CD,DA}$. Montrer que MNPQ est un parallélogramme.

2) Soit P un plan affine, $\mathrm{A,B}$ deux points distincts de P. À tout point M de P on associe le centre de gravité M' du triangle ABM (= barycentre de $\mathrm{A,B,M}$ affectés de coefficients 1). Montrer que l'application $\mathrm{M} \mapsto \mathrm{M}'$ est une homothétie; donner son centre et son rapport.

3) Soient $\mathrm{A,B,C,D}$ quatre points dans un espace affine de dimension 3, non contenus dans un plan. On appelle segment diagonal du tétraèdre ABCD les segments joignant les milieux de deux arêtes opposées, par exemple le milieu de AB et celui de CD. Montrer que les trois segments diagonaux se coupent en un point, qui est leur milieu commun.

4) Soit P un plan affine, $\mathrm{A,B,C,D}$ quatre points de P, dont trois quelconques ne sont pas alignés. On suppose que les droites AB et CD se coupent en un point E et que les droites AD et BC se coupent en un point F. On choisit le repère affine $(\mathrm{E,A,C})$; on note $(b,0)$ les coordonnées de B et $(0,d)$ celles de D. Trouver les coordonnées de F. Montrer que les milieux de $\mathrm{AC,BD}$ et EF sont alignés.

7ème semaine

Définition du produit vectoriel (dans un e.v. euclidien orienté de dimension 3): unique application bilinéaire alternée $\wedge : \mathrm{V} \times \mathrm{V} \to \mathrm{V}$ telle que $e_1 \wedge e_2 = e_3$ pour toute base orthonormale directe (e_1, e_2, e_3). Propriétés: $x \wedge y$ est orthogonal à x et y ; longueur de $\| x \wedge y \|$.

4. Espace affine euclidien

Définition. Distance de 2 points. Projection orthogonale. Isométries affines. Exemples: translations, symétries, rotations. Groupe des isométries affines.

5. Isométries du plan et de l'espace

Proposition : Toute isométrie (affine) directe du plan est une translation ou une rotation; toute isométrie indirecte est une symétrie glissée.

8ème semaine

Similitudes.

Proposition : Tout déplacement de l'espace est une translation ou un vissage.

6. Angles et cercles

Rappel sur les angles de vecteurs (ou demi-droites) dans un plan euclidien orienté. Angles de droites.

Proposition : La somme des angles d'un triangle est égale à π.

Cercles: définition, équation. Par 3 points non colinéaires passe un unique cercle. Lieu des points M du plan tels que $\| \overrightarrow{\mathrm{MA}} \| = k \| \overrightarrow{\mathrm{MB}} \|$.

9ème semaine

Proposition : $\mathrm{A, B, M}$ non colinéaires sur un cercle de centre O $\Rightarrow$ $(\overrightarrow{\mathrm{OA}}, \overrightarrow{\mathrm{OB}}) = 2(\overrightarrow{\mathrm{MA}}, \overrightarrow{\mathrm{MB}})$.

Cas $\mathrm{M} = \mathrm{B}$: $(\overrightarrow{\mathrm{OA}}, \overrightarrow{\mathrm{OB}}) = 2(\mathrm{T_A}, \mathrm{AB})$ où $\mathrm{T_A} =$ tangente en A au cercle.

Corollaire 1 : Si AB est un diamètre, $(\overrightarrow{\mathrm{MA}}, \overrightarrow{\mathrm{MB}}) = \frac{\pi}{2}$ (mod. π).

Corollaire 2 : $\mathrm{A, B, C}$ non colinéaires. $\mathrm{A, B, C, D}$ cocycliques $\Longleftrightarrow$ $(\mathrm{CA}, \mathrm{CB}) = (\mathrm{DA}, \mathrm{DB})$.

Puissance d'un point par rapport à un cercle. 4 points $\mathrm{A, B, C, D}$ tels que $\mathrm{AB} \cap \mathrm{CD} = \mathrm{M}$ sont cocycliques $\Longleftrightarrow$ $\overrightarrow{\mathrm{MA}}.\overrightarrow{\mathrm{MB}} = \overrightarrow{\mathrm{MC}}.\overrightarrow{\mathrm{MD}}$.

7. Coniques

Coniques dans le plan affine (= définies par une équation de degré 2). Forme réduite: $x^2 \pm y^2 = 1$ ou $y = x^2$.

Coniques dans le plan affine euclidien. Forme réduite dans une base orthonormale convenable: $\frac{x^2}{a^2} \pm \frac{y^2}{b^2} = 1$, ou $y = ax^2$.

10ème semaine

Définition focale des coniques: D droite de E , $\mathrm{F} \in \mathrm{E} - \mathrm{D}$, $e > 0$:

$\mathcal{C} = \{\mathrm{M} \in \mathrm{E} \mid d(\mathrm{M},\mathrm{F}) = ed(\mathrm{M},\mathrm{D})\}$ $\rightarrow$ Ellipse $(e < 1)$, hyperbole $(e > 1)$, parabole $(e = 1)$

Définition bifocale: $\mathcal{C} =$ ensemble des $\mathrm{M} \in \mathrm{E}$ tels que:

$$\mathrm{MF} + \mathrm{MF}' = 2a \text{ (ellipse)} \quad , \quad |\mathrm{MF} - \mathrm{MF}'| = 2a \text{ (hyperbole)} \ .$$

Proposition : Si la tangente en M à une conique de foyer F et directrice D coupe D en T , FM et FT sont orthogonales.