

Université de Nice-Sophia Antipolis
Laboratoire J.-A. Dieudonné
UMR CNRS 6621

**HABILITATION A DIRIGER DES RECHERCHES EN
MATHEMATIQUES**

présentée et soutenue publiquement par

Florent BERTHELIN

le Jeudi 3 Décembre 2009

Titre :

**QUELQUES EQUATIONS CINETIQUES ET HYPERBOLIQUES :
LIMITES HYDRODYNAMIQUES, MODELES AVEC CONTRAINTES
ET METHODES NUMERIQUES**

Après avis de :

- M. Thierry Gallouët (Université d'Aix-Marseille),
- M. François Golse (Ecole Polytechnique),
- M. Eitan Tadmor (Université du Maryland, USA).

Devant le jury composé de :

- M. François Bouchut (CNRS),
- M. Pierre Charrier (Université de Bordeaux),
- M. Thierry Gallouët (Université d'Aix-Marseille),
- M. François Golse (Ecole Polytechnique),
- M. Gilles Lebeau (Université de Nice),
- M. Benoît Perthame (Université de Paris VI).

Table des matières

Introduction	5
I Limites hydrodynamiques	7
1 Contexte des limites hydrodynamiques	8
1.1 Lois de conservation	8
1.2 Equations de Boltzmann et limites hydrodynamiques	9
1.3 Modèles BGK	10
2 Résumé succinct des travaux de thèse relatifs aux limites hydrodynamiques	12
2.1 Limite hydrodynamique vers les gaz isentropiques avec toutes les inégalités d'entropie	12
2.2 Gaz isentropiques avec condition de bord	14
3 Limite hydrodynamique avec une seule entropie compatible	16
3.1 Le modèle BGK avec une seule entropie ayant une extension cinétique	16
3.2 Un lemme de moyenne adapté aux équations BGK	18
3.3 Estimation du gradient et convergence	19
4 Méthode d'entropie relative par contrôle du flux relatif	20
4.1 Limite hydrodynamique sans hypothèse de support en vitesse	20
4.2 Une méthode générale de preuve	22
4.3 Application de la méthode pour les gaz isentropiques	25
5 Boltzmann discret vers Euler	26
5.1 Modèle de Boltzmann discret	26
5.2 Estimation de la dissipation d'entropie et limite vers Euler	28
6 Limite en champ fort	29
6.1 Limites de relaxation BGK avec champ fort	30
6.2 Limite formelle et Maxwellienne modifiée	31
6.3 Technique BV et compacité par compensation	33
7 Lemmes de moyenne pour une équation de transport complète	34
7.1 Rappel sur les lemmes de moyenne	34
7.2 Résultats avec terme de force	35
II Modélisations mathématiques	37
8 Rappel succinct de la thèse sur les modèles avec contraintes	38
8.1 Modèle avec contrainte sur la densité	38
8.2 Modèle de contrainte avec perte de masse	39
9 Modélisation en trafic routier	40
9.1 Bref historique de quelques modélisations en trafic routier	40

9.2	Modèles avec contrainte en trafic routier	41
9.3	Solutions particulières et théorèmes d'existence	42
10	Modélisation cinétique non-collisionnelle	45

III Etudes numériques 47

11	Flux-splitting pour modèles avec contraintes	48
11.1	Modèles hyperboliques généraux avec contraintes	48
11.2	Schéma de Flux-splitting avec contraintes	50
11.3	Convergence du schéma pour les gaz isentropiques	50
12	Flux-splitting pour le modèle avec une seule entropie	53
12.1	Présentation du schéma et théorème de convergence	53
12.2	η -dissipativité et estimation du gradient	55
12.3	Formulation cinétique avec trois vitesses et dissipation d'entropie	56
12.4	Bornes sur les entropies et convergence	58

Annexes 59

	Travaux depuis la fin de la thèse	59
	Travaux issus de la thèse	60
	Bibliographie	61

Introduction

Ce mémoire est consacré à des problèmes d'équations aux dérivées partielles hyperboliques et cinétiques qui interviennent dans différentes modélisations physiques.

Dans la première partie, nous nous intéressons à des problèmes de limites hydrodynamiques d'équations cinétiques vers des systèmes de lois de conservation hyperboliques. Après un bref rappel des travaux obtenus sur ce sujet durant la thèse, nous présentons une amélioration de ceux-ci par une limite hydrodynamique avec une seule entropie compatible. Ceci se fait en estimant la dérivée des solutions approchées, estimation qui se compare avec la dissipation d'entropie ce qui permet de justifier la limite. Nous présentons ensuite une autre direction de preuves pour ce type de problèmes. La technique proposée est de type entropie relative et est générale à partir du moment où le système étudié possède un contrôle du flux relatif par l'entropie relative. Cette technique permet de bien séparer les effets de la dissipation cinétique du contrôle des non-linéarités. Nous illustrons ensuite cette technique sur deux exemples significatifs, celui où le système limite est la dynamique des gaz isentropiques, et celui de l'équation de Boltzmann discrète vers les équations d'Euler. Cette partie se poursuit par une autre relaxation qui fait intervenir un terme de champ fort dans l'équation cinétique et nous étudions comment ceci modifie l'équation limite. La partie se conclut par l'obtention de lemmes de moyenne qui dans le cas présent améliorent la régularité obtenue pour une équation de transport avec un terme de force.

La seconde partie s'intéresse à des problèmes de modélisations hyperboliques et cinétiques. Après le rappel des résultats obtenus durant la thèse sur les modèles avec contraintes, nous investissons ces idées afin de définir des modèles en trafic routier qui permettent d'améliorer les modèles existants en rajoutant un contrôle sur la valeur maximale de la densité de voitures dans une zone de bouchon. Nous en proposons deux modèles selon que la contrainte dépend ou non de la vitesse locale, ce qui revient à avoir une vitesse de propagation finie ou infinie de l'information dans une zone de trafic. Nous montrons l'existence de solutions sur ces deux modèles. Cette partie se termine par des modèles cinétiques de type water-bag pour l'équation de Vlasov.

Dans la dernière partie, nous nous intéressons à la convergence de schémas numériques pour des modèles associés aux deux parties précédentes. Tout d'abord pour un schéma qui puisse conserver des modèles avec contraintes. Il s'agit alors de rajouter une étape de projection à un modèle de Flux-splitting. La convergence du schéma nécessite le contrôle de mesures afin de justifier une technique de compacité par compensation. Ensuite nous étudions un schéma avec une seule entropie compatible. Il s'agit alors comme au niveau théorique d'obtenir une estimation des dérivées des solutions approchées. Afin de justifier la convergence du schéma, il est nécessaire en plus d'écrire une formulation cinétique du schéma de Flux-splitting.

Mots Clés :

Equation cinétique, lois de conservation, modèle BGK, limite hydrodynamique, gaz isentropique, système d'Euler, lemme de moyenne, entropie, méthode d'entropie relative, Boltzmann discret, champ fort, compacité par compensation, modèle avec contrainte, trafic routier, schéma de décomposition de flux (Flux-splitting), dissipativité

Contact :

Berthelin Florent
Laboratoire J. A. Dieudonné, UMR 6621 CNRS
Université de Nice, Parc Valrose
06108 Nice cedex 2, France
email : Florent.Berthelin@unice.fr

Première partie
Limites hydrodynamiques

1 Contexte des limites hydrodynamiques

Les problèmes de limites hydrodynamiques concernent la justification de la limite des équations cinétiques vers les équations de la mécanique des fluides quand le libre parcours moyen tend vers 0.

De grands progrès ont été faits ces dernières années dans ce domaine. Citons par exemple les travaux importants [9], [10], [143], [103], [102], [182], [183], ..., dont nous évoquerons certains aspects dans la suite.

Précisons maintenant le cadre dans lequel nous nous placerons dans ce mémoire. Tout d'abord, nous présenterons les équations limites obtenues qui seront de type lois de conservation, puis nous détaillerons les équations cinétiques étudiées, ce qu'est une limite hydrodynamique et en particulier le cas des modèles BGK.

1.1 Lois de conservation

Un système de lois de conservation est un système de la forme

$$\partial_t U + \sum_{i=1}^n \partial_{x_i} F_i(U) = 0, \quad U(t, x) \in \mathbb{R}^k, t \in \mathbb{R}, x \in \mathbb{R}^n, \quad (1.1)$$

où U représente les quantités physiques qui sont conservées par le modèle et où F représente le flux du système.

Les systèmes de loi de conservation les plus étudiés sont les équations d'Euler et de Navier-Stokes, introduites voilà plus de deux siècles. Le système d'Euler pour les gaz parfaits s'écrit

$$\begin{cases} \partial_t \rho + \operatorname{div}_x(\rho u) = 0, & t \in \mathbb{R}^+, x \in \mathbb{R}^n, \\ \partial_t(\rho u) + \operatorname{div}_x(\rho u \otimes u + \rho T I) = 0, & t \in \mathbb{R}^+, x \in \mathbb{R}^n, \\ \partial_t(\rho |u|^2 + n \rho T) + \operatorname{div}_x(\rho |u|^2 u + (n+2)\rho T u) = 0, & t \in \mathbb{R}^+, x \in \mathbb{R}^n. \end{cases} \quad (1.2)$$

Nous nous intéresserons en particulier au cas de la dynamique des gaz isentropiques

$$\begin{cases} \partial_t \rho + \operatorname{div}_x(\rho u) = 0, & t \in \mathbb{R}^+, x \in \mathbb{R}^n, \\ \partial_t(\rho u) + \operatorname{div}_x(\rho u \otimes u + I p(\rho)) = 0, & t \in \mathbb{R}^+, x \in \mathbb{R}^n, \end{cases} \quad (1.3)$$

avec $p(\rho) = \kappa \rho^\gamma$ pour $1 \leq \gamma \leq 3$, système qui consiste à considérer les équations de conservation de la masse et de la quantité de mouvement et à fermer le système par une loi donnant une pression isentropique plutôt que de conserver une équation d'évolution sur l'énergie comme dans Euler. Nous étudierons aussi une autre équation de type Euler, voir (5.86). Voir [185] pour plus de détails sur la présentation de tels modèles.

Les systèmes de loi de conservation du type (1.1) sont mal posés en général. Pour des données initiales suffisamment régulières, il existe un intervalle de temps sur lequel une solution forte existe, mais l'unicité n'est pas vérifiée, il est nécessaire pour cela de rajouter des critères d'entropie ([135], [136] et [68]). Ces critères d'entropie, introduits dans [91] et qui souvent ont une origine physique, sélectionnent la "bonne" solution. Il s'agit de quantités supplémentaires aux variables du système de lois de conservation qui sont conservées ou tout au moins pour lesquelles une décroissance du type

$$\partial_t \eta(U) + \sum_{i=1}^n \partial_{x_i} G_i(U) \leq 0, \quad (1.4)$$

est vérifiée. Kruřkov, dans [132], utilisa les fonctions $\eta(U) = |U - k|$ avec $k \in \mathbb{R}$ pour obtenir l'unicité pour une loi de conservation scalaire. Les entropies jouent également un grand rôle dans la compréhension et les preuves par compacité pour les équations de type Euler ou gaz isentropiques. Pour $n \geq 2$, il y a peu d'entropie pour le système des gaz isentropiques ce qui explique les limites actuelles pour l'étude de cette équation pour des données dans L^∞ . Pour $n = 1$ par contre, le grand nombre d'entropies existantes a permis d'obtenir l'existence de solutions entropiques dans L^∞ par DiPerna [77] pour $\gamma = (2k + 3)/(2k + 1)$ avec $k \in \mathbb{N}^*$, puis par Chen [60] pour $1 < \gamma \leq 5/3$, par Lions, Perthame et Tadmor [147] pour $\gamma > 3$ et finalement par Lions, Perthame et Souganidis [145] pour $1 < \gamma < 3$.

1.2 Equations de Boltzmann et limites hydrodynamiques

La théorie cinétique a été introduite par Maxwell et Boltzmann pour modéliser des gaz raréfiés. Un gaz, un plasma ou tout autre système comprenant un très grand nombre de particules peut ainsi être décrit par une fonction de distribution $f(t, x, \xi)$, dans l'espace des phases (x, ξ) associé aux atomes, où x est la variable macroscopique de position et ξ la variable microscopique/cinétique. Sa signification physique est la suivante : $f(t, x, \xi) dx d\xi$ représente la densité de particules dans l'élément de volume $dx d\xi$ centré en (x, ξ) au temps t . En supposant que le système est constitué de particules de même espèce et que la dynamique qui les régit est non relativiste et non quantique, la variable microscopique correspond à la variable de vitesse cinétique. Une des idées de base est que toutes les quantités macroscopiques observables vont pouvoir être restituées grâce à des intégrations de la fonction de distribution par rapport à la variable microscopique ξ , c'est-à-dire des intégrales du type

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(t, x, \xi) S(\xi) d\xi.$$

Par exemple dans le modèle de Boltzmann, on peut définir la densité locale ρ , la vitesse macroscopique locale u , la température locale T et donc l'énergie par

$$(\rho, \rho u, \rho |u|^2 + n\rho T)(t, x) = \int_{\mathbb{R}^n} (1, \xi, |\xi|^2) f(t, x, \xi) d\xi. \quad (1.5)$$

Une hypothèse du type $f(t, \cdot, \cdot) \in L^1_{loc(x)}$ revient alors à supposer que tout domaine borné de l'espace physique ne contient qu'une quantité finie de matière.

L'équation cinétique de Boltzmann pour la dynamique des gaz raréfiés s'écrit :

$$\partial_t f + \xi \cdot \nabla_x f = \frac{Q(f)}{\varepsilon}, \quad (1.6)$$

où $f(t, x, \xi)$ est la densité de particules dans l'espace des phases $(x, \xi) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$, ε le libre parcours moyen et Q l'opérateur de collision de Boltzmann. L'opérateur Q est intégral, agit sur la variable cinétique ξ uniquement et vérifie les moments

$$\int_{\mathbb{R}^n} (1, \xi_i, |\xi|^2) Q(f)(\xi) d\xi = 0,$$

et l'inégalité d'entropie

$$\int_{\mathbb{R}^n} \ln f(\xi) Q(f)(\xi) d\xi \leq 0.$$

Ces propriétés permettent, par intégration par rapport à ξ , d'obtenir la conservation locale de la masse, de la quantité de mouvement, de l'énergie définie plus haut et la décroissance de l'entropie

$$\partial_t \int_{\mathbb{R}^n} f \ln f \, d\xi + \operatorname{div}_x \int_{\mathbb{R}^n} \xi f \ln f \, d\xi \leq 0.$$

Une propriété importante de l'opérateur de Boltzmann est que $Q(f) = 0$ si et seulement si f est une fonction d'équilibre thermodynamique appelée Maxwellienne et de la forme

$$M_{\rho,u,T}(\xi) = \frac{\rho}{(2\pi T)^{n/2}} e^{-|\xi-u|^2/(2T)},$$

pour des valeurs $\rho \geq 0$, $T > 0$ et $u \in \mathbb{R}^n$. La relaxation du modèle lorsque ε tend vers 0 donne, formellement, la convergence de f vers une Maxwellienne de paramètre $\rho(t, x)$, $u(t, x)$ et $T(t, x)$, fonctions qui vont vérifier le système d'Euler (1.2). C'est l'étude de ce genre de limites que l'on appelle limite hydrodynamique. La preuve rigoureuse de ce problème de relaxation est encore ouverte à ce jour. Pour une présentation générale des modèles cinétiques, le lecteur peut consulter [45], [171], [57], [58], [36] et [78].

Il est connu que l'équation (1.6) ne possède pas, sous cette forme, de solutions globales en temps. DiPerna et Lions ont obtenu l'existence et la stabilité de solutions renormalisées dans [80].

Concernant la limite compressible (où l'on rajoute une hypothèse de divergence nulle du champ de vitesse) de l'équation de Boltzmann, Caffisch [55] a montré la limite hydrodynamique dans le cas de données régulières et sur un petit intervalle de temps. Ensuite, la limite asymptotique de l'équation de Boltzmann à faible nombre de Mach vers Euler (ou Navier-Stokes) incompressible a été obtenue par Saint-Raymond [183] et Lions, Masmoudi [143] suivant les travaux de Bardos, Golse et Levermore [9], [10], [11]. Il s'agit de résultats locaux en temps car valable sur l'intervalle de temps pour lequel la solution limite reste régulière.

1.3 Modèles BGK

L'étude de l'équation cinétique de Boltzmann montre que seules certaines propriétés du modèle sont indispensables pour pouvoir espérer obtenir la limite hydrodynamique ; il n'est donc pas nécessaire de conserver le noyau de collision avec toutes les difficultés qu'il contient. C'est l'idée principale du modèle introduit par Bhatnagar, Gross et Krook [35], appelé modèle BGK : remplacer la cinétique de Boltzmann par un modèle plus simple qui redonne la même configuration d'équilibre hydrodynamique. Ce modèle BGK satisfait les propriétés du modèle de Boltzmann que sont conservation de la masse, quantité de mouvement, d'énergie et propriété d'entropie et s'écrit comme (1.6) en remplaçant le noyau de collision par

$$Q(f) = M_f - f, \quad M_f = M_{\rho_f, u_f, T_f},$$

où ρ_f , u_f et T_f sont définis par (1.5). L'existence et la stabilité de solutions globales satisfaisant une relation d'entropie pour ce modèle ont été prouvées par Perthame [168]. On pourra consulter également [172] pour des compléments et en particulier l'unicité.

Ces modèles ont ensuite été généralisés afin de construire des équations cinétiques adaptées à différents systèmes hydrodynamiques (pour plus de détails que ce qui suit,

voir le livre de Perthame [171]). Le modèle BGK de Lions, Perthame et Tadmor [146] pour une loi de conservation scalaire (à savoir (1.1) avec $k = 1$) s'écrit :

$$\partial_t f + F'(\xi) \cdot \nabla_x f = \frac{M_f - f}{\varepsilon}, \quad t \in \mathbb{R}, x \in \mathbb{R}^n, \xi \in \mathbb{R},$$

où la Maxwellienne est

$$M_f(t, x, \xi) = \chi_{\rho(t, x)}(\xi),$$

avec la fonction d'équilibre

$$\chi_{\rho}(v) = \begin{cases} \operatorname{sgn}(\rho) & \text{si } (\rho - \xi)\xi \geq 0, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \quad (1.7)$$

Lorsque $\varepsilon \rightarrow 0$, on obtient

$$\partial_t f + F'(\xi) \cdot \nabla_x f = \partial_{\xi} \mu, \quad (1.8)$$

où μ est une mesure positive et f une Maxwellienne. En intégrant en ξ , il vient (1.1). Multipliant par $S'(\xi)$ avec S convexe puis intégrant en ξ , nous obtenons les inégalités d'entropie. Le lecteur pourra consulter également [48], [175] et [51] pour des résultats sur le cas scalaire.

Une étude générale des modèles BGK a été réalisée par Bouchut dans [40] afin d'obtenir des conditions pour l'existence de modèles BGK pour des systèmes de lois de conservation du type (1.1). Un modèle BGK, pour un système de lois de conservation (1.1) et pour une famille \mathcal{E} d'entropies convexes, consiste principalement en

1) une équation de transport avec terme de relaxation

$$\partial_t f + a(\xi) \cdot \nabla_x f = \frac{M_f - f}{\varepsilon}, \quad t > 0, x \in \mathbb{R}^n, \xi \in \mathbb{R}^m, \quad (1.9)$$

d'inconnue $f(t, x, \xi) \in \mathbb{R}^k$ vectorielle et de vitesse $a : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$, avec

$$M_f(t, x, \xi) = M(U(t, x), \xi), \quad U(t, x) = \int_{\mathbb{R}^m} f(t, x, \xi) d\xi,$$

où l'état d'équilibre (Maxwellienne) $M : \mathcal{U} \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^k$ (avec $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^k$) vérifie

$$\int_{\mathbb{R}^m} M(U, \xi) d\xi = U, \quad \int_{\mathbb{R}^m} a_i(\xi) M(U, \xi) d\xi = F_i(U), \quad (1.10)$$

2) l'existence d'entropies cinétiques $H_{\eta}(f, \xi)$ pour tout $\eta \in \mathcal{E}$ telles que p.p. ξ ,

$$H_{\eta}(\cdot, \xi) : D_{\xi} \rightarrow \mathbb{R} \text{ est convexe,} \quad (1.11)$$

$$\int_{\mathbb{R}^m} H_{\eta}(M(U, \xi), \xi) d\xi = \eta(U), \quad \forall U \in \mathcal{U}, \quad (1.12)$$

et $\forall f : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^k$ telle que $f(\xi) \in D_{\xi}$ p.p. ξ et $U_f = \int_{\mathbb{R}^m} f(\xi) d\xi \in \mathcal{U}$, $M(U_f, \xi) \in D_{\xi}$ et

$$\int_{\mathbb{R}^m} H_{\eta}(M(U_f, \xi), \xi) d\xi \leq \int_{\mathbb{R}^m} H_{\eta}(f(\xi), \xi) d\xi. \quad (1.13)$$

Notons que les variables de (1.1) s'obtiennent ici par intégration du f vectoriel et non pas comme dans (1.5) pour Boltzmann. Ces propriétés permettent d'obtenir formellement la

limite hydrodynamique et les inégalités d'entropie. Si $U_\varepsilon \rightarrow U$, alors une étude du terme de relaxation fait apparaître une Maxwellienne à la limite $f_\varepsilon \rightarrow M(U, \xi)$. A partir de l'équation (1.9), par intégration en ξ , la limite donne

$$\partial_t \int_{\mathbb{R}^m} M(U, \xi) d\xi + \sum_{i=1}^N \partial_{x_i} \int_{\mathbb{R}^m} a_i(\xi) M(U, \xi) d\xi = 0,$$

soit le système (1.1). Multipliant maintenant (1.9) par $\partial_f H_\eta(f_\varepsilon)$, il vient l'équation renormalisée

$$\partial_t H_\eta(f_\varepsilon) + a(\xi) \cdot \nabla_x (H_\eta(f_\varepsilon)) = \partial_f H_\eta(f_\varepsilon) \cdot \frac{M_{f_\varepsilon} - f_\varepsilon}{\varepsilon} \leq \frac{H_\eta(M_{f_\varepsilon}) - H_\eta(f_\varepsilon)}{\varepsilon}.$$

En intégrant par rapport à ξ , puis en passant à la limite, nous obtenons (1.4) avec $G(U) = \int a(\xi) H_\eta(M(U, \xi), \xi) d\xi$, un flux d'entropie associé à η . Nous renvoyons à [40] pour plus de détails et des critères d'existence de tels modèles pour un système donné. Voir aussi [122], [155], [2] pour des stratégies pour construire des modèles BGK. La justification rigoureuse de cette limite pour les systèmes réguliers a été faite dans [186]. Le cas du système des gaz isentropiques est le sujet de la section suivante en tant que travail issu de la thèse.

2 Résumé succinct des travaux de thèse relatifs aux limites hydrodynamiques

2.1 Limite hydrodynamique vers les gaz isentropiques avec toutes les inégalités d'entropie

Dans les papiers [20] et [21], nous étudions la limite de relaxation d'un modèle BGK de type vectoriel (1.9) avec $k = 2$, $a(\xi) = \xi$, $n = m = 1$, $U = (\rho, \rho u)$, $D_\xi = D = \{(f_0, f_1) \in \mathbb{R}^2; f_0 > 0 \text{ ou } f_0 = f_1 = 0\}$ et

$$M(\rho, u, \xi) = \left(1, (1-\theta)u + \theta\xi\right) \tilde{\chi}(\rho, \xi - u), \quad \tilde{\chi}(\rho, \xi) = c_{\gamma, \theta, \kappa} \left(\frac{2\gamma\kappa}{(\gamma-1)\theta} \rho^{\gamma-1} - \xi^2 \right)_+^{1/(\gamma-1)-1/2}, \quad (2.14)$$

avec $1 < \gamma < 3$, $c_{\gamma, \theta, \kappa}$ une constante dépendant de γ, θ et κ et avec

$$\theta = (\gamma - 1)/2. \quad (2.15)$$

La fonction d'équilibre cinétique $\tilde{\chi}$ a été introduite dans [77] comme une fonction qui génère les entropies du système isentropique. Cette fonction est également utilisée dans le résultat de stabilité de [145] et dans [147] pour une formulation cinétique différente de celle utilisée ici. Le modèle présenté ici provient de [40] et est adapté au système des gaz isentropiques (1.3) avec $n = 1$ pour $1 < \gamma < 3$. Ce modèle BGK possède des entropies cinétiques dont celle associée à l'énergie est donnée par

$$H(f, \xi) = \frac{\theta}{1-\theta} \frac{1}{2} \left(\frac{f_1}{\sqrt{f_0}} - \xi \sqrt{f_0} \right)^2 + \frac{\theta(3-\gamma)}{2c_{\gamma, \theta, \kappa}^{2(\gamma-1)/(3-\gamma)}} \frac{f_0^{(\gamma+1)/((3-\gamma))}}{\gamma+1} + \frac{1}{2} \frac{f_1^2}{f_0}. \quad (2.16)$$

Voir aussi [192], [193] pour le cas $\gamma = 3$ où le système se ramène au niveau cinétique à une seule équation. Voir également [189], [176] pour des travaux dans ces directions.

Tout d'abord, dans [20], nous prouvons l'existence d'une solution de l'équation cinétique BGK à l'aide du théorème de point fixe de Schauder, de la compacité faible dans L^1 et un lemme de moyenne.

Théorème 2.1 ([20]) *Soit $k = 2$, $a(\xi) = \xi$, $n = m = 1$. Supposons que $f^0 \in L^1(\mathbb{R}_x \times \mathbb{R}_\xi)$ satisfait $f^0(x, \xi) \in D$ p.p. et avec l'énergie initiale $\iint_{\mathbb{R} \times \mathbb{R}} H(f^0(x, \xi), \xi) dx d\xi = C_H^0 < \infty$.*

Alors il existe une solution $f \in C([0, \infty[, L^1(\mathbb{R} \times \mathbb{R}))$ de (1.9) et (2.14)-(2.15) pour $1 < \gamma < 3$ avec la donnée initiale f^0 satisfaisant

$$\left[\int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} H(f(t, x, \xi), \xi) dx d\xi \right]_0^T = \frac{1}{\varepsilon} \iiint_{]0, T[\times \mathbb{R} \times \mathbb{R}} \text{Dissi}(f, \rho, u, \xi)(t, x, \xi) dt dx d\xi, \quad (2.17)$$

où la dissipation vérifie

$$\text{Dissi}(f, \rho, u, \xi) = \left(H'(f, \xi) - \left(\frac{\gamma \kappa}{\gamma - 1} \rho^{\gamma-1} - \frac{u^2}{2}, u \right) \right) \cdot (M[f] - f) \leq 0 \quad \text{p.p.} \quad (2.18)$$

Ce genre d'estimation qui va contrôler l'écart entre f_ε et M_ε est à rapprocher des inégalités de type Csiszár-Kullback (voir [4], [5], [73]).

Dans [21], nous prouvons qu'il existe des domaines invariants cinétiques qui sont en correspondance avec les domaines macroscopiques (voir [186] et [21] pour les définitions de ces notions). Ceci permet d'avoir un principe du maximum et d'aboutir à la convergence quand le paramètre de relaxation ε tend vers 0.

Théorème 2.2 ([21]) *Avec les notations du Théorème 2.1, pour tout $\omega_{min} < \omega_{max}$, le système (1.9) vérifie la propriété que*

$$\tilde{D}_\varepsilon = \{f \in D; f = 0 \text{ ou } \omega_{min} \leq \omega_1(\rho(f, \xi), u(f, \xi)) \leq \omega_2(\rho(f, \xi), u(f, \xi)) \leq \omega_{max}\} \quad (2.19)$$

est une famille de domaines invariants cinétiques convexes, avec ω_1, ω_2 les invariants de Riemann définis par

$$\omega_1(\rho, u) = u - \frac{2\sqrt{\gamma\kappa}}{\gamma-1} \rho^{\frac{\gamma-1}{2}}, \quad \omega_2(\rho, u) = u + \frac{2\sqrt{\gamma\kappa}}{\gamma-1} \rho^{\frac{\gamma-1}{2}}, \quad (2.20)$$

et avec

$$u(f, \xi) = \frac{f_1/f_0 - \theta\xi}{1 - \theta}, \quad \rho(f, \xi) = \left(\frac{4\gamma\kappa}{(\gamma-1)^2} \right)^{-1/(\gamma-1)} \left(\left(\frac{f_1/f_0 - \xi}{1 - \theta} \right)^2 + \left(\frac{f_0}{C_{\gamma, \theta, \kappa}} \right)^{2(\gamma-1)/(3-\gamma)} \right)^{1/(\gamma-1)}. \quad (2.21)$$

De plus, les ensembles \tilde{D}_ε sont associés aux domaines invariants de (1.3)

$$\tilde{D} = \{(\rho, u) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}; \rho = 0 \text{ ou } \omega_{min} \leq \omega_1(\rho, u) \leq \omega_2(\rho, u) \leq \omega_{max}\}, \quad (2.22)$$

au sens où pour tout $(\rho, u) \in \tilde{D}$, $M(\rho, u, \xi) \in \tilde{D}_\varepsilon$ p.p. ξ , et pour tout $f(\xi) \in L^1(\mathbb{R}_\xi)$ tel que $f(\xi) \in \tilde{D}_\varepsilon$ p.p. ξ , $(\rho, u) \in \tilde{D}$ avec $(\rho, u) = \int_{\mathbb{R}} f(\xi) d\xi$.

Une estimation des inégalités d'entropie et l'application de la compacité par compensation de [145], permet d'obtenir le résultat de convergence

Théorème 2.3 ([21]) *Avec les notations du Théorème 2.1 et notant f_ε la solution de cet énoncé avec la même donnée initiale $f^0(x, \xi) \in L^1(\mathbb{R} \times \mathbb{R})$ telle que $f^0(x, \xi) \in \tilde{D}_\xi$ p.p. pour des $\omega_{\min} < \omega_{\max}$, et la borne d'énergie $\iint_{]0, \infty[\times \mathbb{R}} H(f^0(x, \xi), \xi) dx d\xi < \infty$, les quantités $(\rho_\varepsilon, u_\varepsilon)$, définis par $(\rho_\varepsilon, \rho_\varepsilon u_\varepsilon) = \int f_\varepsilon d\xi$, sont uniformément bornés dans L^∞ , et, pour une sous-suite, $(\rho_\varepsilon, \rho_\varepsilon u_\varepsilon)$ converge p.p. dans $]0, \infty[\times \mathbb{R}$ quand $\varepsilon \rightarrow 0$ vers une solution entropique $(\rho, \rho u)$ de (1.3) pour $n = 1$ et $1 < \gamma < 3$, avec la donnée initiale $(\rho^0, \rho^0 u^0) = \int f^0 d\xi$.*

2.2 Gaz isentropiques avec condition de bord

Dans [22], nous obtenons la relaxation du modèle BGK de la section précédente vers le système des gaz isentropiques dans le cas d'un problème avec une condition de bord. Ceci permet de définir une méthode générale pour étudier les limites de relaxation des systèmes de lois de conservation avec une condition de bord et également de montrer l'existence des solutions pour les gaz isentropiques avec une condition de bord.

Nous étudions donc le système (1.3) pour $n = 1$ et $1 < \gamma < 3$ avec une donnée initiale

$$\rho(0, x) = \rho^0(x), \quad \rho(0, x)u(0, x) = \rho^0(x)u^0(x), \quad x > 0, \quad (2.23)$$

et des conditions de Dirichlet au bord

$$\rho(t, 0) = \rho^b(t), \quad \rho(t, 0)u(t, 0) = \rho^b(t)u^b(t), \quad t > 0. \quad (2.24)$$

Il est connu ([131], [113]) que pour une loi de conservation de la forme (1.1) une condition de bord $U(t, 0) = U^b(t)$ pour $t > 0$ ne peut être satisfaite partout, ainsi une formulation faible doit être introduite. Dans [83], Dubois et Le Floch proposent deux formulations pour une condition de bord de type Dirichlet en $x = 0$: une basée sur des demi-problèmes de Riemann, et une autre basée sur l'approximation du système de lois de conservation par un modèle parabolique ou visceux et de voir l'information conservée à la limite. La formulation obtenue s'écrit alors selon des inégalités entropiques de bord $U(t, 0) \in \mathcal{E}(U^b(t))$, où $\mathcal{E}(U^b)$ est l'ensemble des w tels que

$$G(w) - G(U^b) - \eta'(U^b) \cdot (F(w) - F(U^b)) \leq 0$$

pour tout couple (η, G) d'entropie - flux d'entropie tel que η est convexe. Dans le cas scalaire et dans le cas linéaire, il y a équivalence entre les deux approches, voir [16] et [83] ; il en va de même dans le cas des systèmes pour lesquels les courbes de détente sont des droites, et pour lesquels il existe un domaine convexe positivement invariant, borné, dans lequel les valeurs propres restent non nulles. Cependant, ce n'est pas toujours le cas, comme le montre [16], qui donne une condition sur les systèmes 2×2 pour qu'ils soient égaux. [124] prouve que, pour des systèmes de lois de conservations généraux, les conditions de bord provenant d'approximations visceuses contiennent celles en terme de problèmes de Riemann mais que le contraire est faux. Détaillons davantage la seconde approche qui est celle que nous utiliserons. Pour un système strictement hyperbolique linéaire, la condition de bord doit se trouver dans le sous-espace affine contenant U^b et engendré par les vecteurs propres associés aux valeurs propres négatives ou nulles. On

ne peut donc imposer sur le bord que les composantes de la base de vecteurs propres correspondant aux caractéristiques entrantes. On peut se référer en premier lieu pour ce type de problèmes à [12], [15]. Dans le cas scalaire, Otto [164] a prouvé que cette condition de bord entropique faible donne une unique solution. Une des difficultés de cette formulation est la nécessité d'avoir l'existence de traces. Avec une théorie BV, l'existence d'une trace forte est vérifiée et ainsi [12] a obtenu le premier résultat d'existence et d'unicité dans le cas scalaire. Voir ensuite les travaux de [148] pour la dynamique des gaz en coordonnées lagrangiennes, [106] pour des systèmes hyperboliques avec des petites données initiales, [196] pour un résultat d'unicité, [160] pour le cas de solutions régulières, [161] pour le p -système et [157]. Pour une approche des lois de conservation scalaire avec un modèle BGK, voir [162]. Cependant, il est plus intéressant d'avoir une théorie L^1 ou L^∞ et nous utiliserons ces espaces plutôt que ceux liés à une théorie BV. Ceci nécessite donc l'utilisation de traces faibles selon [61].

Dans le papier [22], nous considérons la seconde approche et les inégalités s'écrivent

$$\overline{G_S(\rho, u)} - G_S(\rho^b, u^b) - \eta'_S(\rho^b, u^b) \cdot (\overline{F(\rho, u)} - F(\rho^b, u^b)) \leq 0, \quad \text{dans }]0, \infty[_t \times \{0\}_x, \quad (2.25)$$

où $F(\rho, u) = (\rho u, \rho u^2 + \kappa \rho^\gamma)$ est le flux du système, les barres désignant les traces faibles. Comme nous prenons en compte le cas du vide $\rho^b = 0$, et puisque la fonction η_S n'est pas différentiable en 0, nous proposons une extension de cette formule.

Nous considérons toujours (1.9) pour $k = 2$, $a(\xi) = \xi$, $n = m = 1$ et $1 < \gamma < 3$ et avec les conditions

$$f(0, x, \xi) = f^0(x, \xi), \quad x > 0, \quad \xi \in \mathbb{R}, \quad f(t, 0, \xi) = f^b(t, \xi), \quad t > 0, \quad \xi > 0. \quad (2.26)$$

Notons que $\xi > 0$ correspond aux vitesses entrantes.

Nous prouvons l'existence d'un solution pour ce problème puis nous étudions la limite de relaxation et obtenons le résultat suivant.

Théorème 2.4 ([22]) *Soit $k = 2$, $a(\xi) = \xi$, $n = m = 1$. Soit $\rho^b, u^b \in L^\infty(]0, \infty[_t)$, $\rho^b \geq 0$, et notant f_ε la solution de (1.9), (2.14)-(2.15) et $1 < \gamma < 3$ avec une donnée initiale $f^0(x, \xi) \in L^1(]0, \infty[_x \times \mathbb{R})$ et une condition de bord selon (2.26) avec $f^b(t, \xi) = M(\rho^b(t), u^b(t), \xi)$ telles que $f^0(x, \xi) \in \tilde{D}_\xi$ p.p. x, ξ , $\rho^b, u^b \in \tilde{D}$ p.p. t pour des $\omega_{\min} < \omega_{\max}$, et la borne d'énergie $\iint_{]0, \infty[_x \times \mathbb{R}} H(f^0(x, \xi), \xi) dx d\xi < \infty$. Alors $(\rho_\varepsilon, u_\varepsilon)$, définie par $(\rho_\varepsilon, \rho_\varepsilon u_\varepsilon) = \int f_\varepsilon d\xi$, reste dans \tilde{D} et est donc uniformément bornée dans L^∞ , et pour une sous-suite, $(\rho_\varepsilon, \rho_\varepsilon u_\varepsilon)$ converge p.p. dans $]0, \infty[_x \times]0, \infty[_t$ quand $\varepsilon \rightarrow 0$ vers une solution entropique $(\rho, \rho u)$ de (1.3) pour $1 < \gamma < 3$ qui reste dans \tilde{D} avec une donnée initiale $(\rho^0, \rho^0 u^0) = \int f^0 d\xi$ et une condition de bord*

$$\overline{G_S(\rho, u)} - G_S(\rho^b, u^b) - T_S(\rho^b, u^b) \cdot (\overline{F(\rho, u)} - F(\rho^b, u^b)) \leq 0, \quad \text{dans }]0, \infty[_t \times \{0\}_x, \quad (2.27)$$

où $T_S(\rho, u) = \frac{1}{J_\lambda} \int_{-1}^1 (1 - z^2)^\lambda \left(\begin{array}{c} S(u + a_\gamma \rho^\theta z) + (\theta a_\gamma \rho^\theta z - u) S'(u + a_\gamma \rho^\theta z) \\ S'(u + a_\gamma \rho^\theta z) \end{array} \right) dz$, et $T_S(\rho^b, u^b)$ coïncide avec $\eta'_S(\rho^b, u^b)$ quand $\rho^b > 0$ et $J_\lambda = \int_{-1}^1 (1 - z^2)^\lambda dz$.

Passons maintenant aux travaux dans le domaine des limites hydrodynamiques effectués depuis la thèse.

3 Limite hydrodynamique avec une seule entropie compatible

Dans les travaux précédent, comme dans le cas de [186], une donnée importante pour justifier la limite hydrodynamique était l'existence d'extension cinétique au sens de (1.12) pour toutes les entropies η . Ceci limite forcément le choix du modèle cinétique qui va approcher l'équation fluide. D'autant que dans les modèles les plus physiques, une seule entropie possède une extension cinétique. Dans ce qui suit, nous proposons une méthode pour justifier le limite de relaxation dans le cas où une seule entropie possède une extension cinétique.

La méthode de DiPerna [76], utilisant la technique de compacité par compensation de Tartar [188], pour établir la convergence des solutions approchées pour les systèmes hyperboliques non linéaires de lois de conservation en dimension un est classique maintenant. Brièvement, elle consiste à multiplier par $\eta'(U_\varepsilon)$ une équation visqueuse $\partial_t U_\varepsilon + \partial_x F(U_\varepsilon) = \varepsilon \partial_{xx}^2 U_\varepsilon$, ce qui donne, notant G le flux associé à l'entropie η ,

$$\partial_t \eta(U_\varepsilon) + \partial_x G(U_\varepsilon) = \varepsilon \partial_{xx}^2 (\eta(U_\varepsilon)) - \varepsilon \eta''(U_\varepsilon) (\partial_x U_\varepsilon)^2. \quad (3.28)$$

Si l'une des entropies η vérifie $\eta''(U_\varepsilon) \geq \alpha > 0$, on obtient

$$\|\partial_x U_\varepsilon\|_{L_{t,x}^2} \leq \frac{C}{\sqrt{\varepsilon}}, \quad (3.29)$$

Ceci entraîne alors pour toutes les entropies que $\varepsilon \partial_{xx}^2 (\eta(U_\varepsilon)) = \sqrt{\varepsilon} \partial_x (\eta'(U_\varepsilon)) \sqrt{\varepsilon} \partial_x U_\varepsilon$ tend vers 0 dans H_{loc}^{-1} et que $\varepsilon \eta''(U_\varepsilon) (\partial_x U_\varepsilon)^2$ est bornée dans L_{loc}^1 . Par un lemme de Murat [153], on conclut alors que $\partial_t \eta(U_\varepsilon) + \partial_x G(U_\varepsilon)$ est compacte dans H_{loc}^{-1} et la compacité par compensation de Tartar permet de conclure à la convergence de la suite (U_ε) .

Cette méthode a été utilisée ensuite principalement pour des équations avec viscosité et des approximations numériques. Cependant établir des résultats similaires pour des modèles de relaxation comme ceux introduit dans [64] n'est pas résolu en général. Pour le cas scalaire, voir le compte rendu de [190]. Dans [189], à partir d'inégalités d'énergie très particulières, Tzavaras obtient une estimation du gradient des solutions approchées de la forme (3.29) où ε est le paramètre de relaxation. (Voir aussi [118] et [117].)

Le travail que nous avons obtenu dans [23] et que nous présentons dans ce qui suit a ainsi pour motivation de généraliser cette approche à des modèles cinétiques de type BGK ayant une seule entropie avec une extension cinétique. Il est à noter en particulier que pour obtenir l'estimation du gradient (3.29), nous avons en particulier établi un nouveau lemme de moyenne particulièrement adapté au cas des équations avec un terme de relaxation BGK.

3.1 Le modèle BGK avec une seule entropie ayant une extension cinétique

Nous nous intéressons à la limite des solutions approchées $(\rho_\varepsilon, \rho_\varepsilon u_\varepsilon) = U_\varepsilon = \int_{\mathbb{R}} f_\varepsilon d\xi$ où f_ε est solution de l'équation cinétique (1.9), avec $k = 2$, $a(\xi) = \xi$, $n = m = 1$ et la Maxwellienne (2.14) pour $1 < \gamma \leq 5/3$ et $0 < \theta \leq 1$, vers les solutions du système de la dynamique des gaz isentropiques (1.3). Notons bien que la relation (2.15) n'est pas

supposée. Ce choix particulier est le seul cas possédant des entropies cinétiques H_η qui sont des extensions cinétiques des entropies η pour toutes les entropies. Dans le présent travail, une seule entropie cinétique va exister, celle associée à l'entropie correspondant à l'énergie physique du système. L'entropie et son flux associée sont

$$\eta^e(\rho, u) = \rho u^2/2 + \frac{\kappa}{\gamma-1} \rho^\gamma, \quad G^e(\rho, u) = (\eta^e(\rho, u) + \kappa \rho^\gamma)u, \quad (3.30)$$

et l'entropie cinétique associé $H(f, \xi)$ définie par (2.16) dans le cas $\theta < 1$, et $H(f, \xi) = \frac{\xi^2}{2} f_0$ dans le cas $\theta = 1$. La schéma de la preuve est d'obtenir une estimation du gradient de la forme (3.29) à l'aide d'un lemme de moyenne puis d'obtenir une estimation de la forme

$$\|M_\varepsilon - f_\varepsilon\|_{L^2_{tx\xi}} \leq C\sqrt{\varepsilon}, \quad (3.31)$$

en utilisant la seule entropie ayant une extension cinétique et finalement de coupler ces deux estimations afin de contrôler toutes les inégalités d'entropie selon

$$\partial_t \eta(U_\varepsilon) + \partial_x G(U_\varepsilon) = m_{\eta, \varepsilon} + R_{\eta, \varepsilon}, \quad (3.32)$$

avec $R_{\eta, \varepsilon} \rightarrow 0$ quand $\varepsilon \rightarrow 0$ dans $W_{loc}^{-1,p}$ pour tout $1 < p < \infty$ et $m_{\eta, \varepsilon}$ des mesures négatives localement bornées, uniformément en ε . Finalement la compacité par compensation permet de conclure à la convergence des solutions approchées.

Le résultat obtenu est le suivant.

Théorème 3.1 ([23]) *Soit $k = 2$, $a(\xi) = \xi$, $n = l = 1$. On suppose que $1 < \gamma \leq 5/3$, et que la solution f_ε de (1.9) avec (2.14), pour une donnée initiale f_ε^0 telle que $f_\varepsilon^0, H(f_\varepsilon^0)$ sont bornées dans $L^1_{x\xi}$ et avec $\|f_\varepsilon^0\|_{H^1_x(\mathbb{R}_x \times \mathbb{R}_\xi)} \leq \frac{C}{\varepsilon}$, vérifie*

$$|f_\varepsilon|, |M[f_\varepsilon]| \leq F, \quad |(f_\varepsilon)_1| \leq A(f_\varepsilon)_0, |(M[f_\varepsilon])_1| \leq A(M[f_\varepsilon])_0, \quad (3.33)$$

$$\text{supp}_\xi f_\varepsilon, \text{supp}_\xi M[f_\varepsilon] \subset \overline{B}(0, Q), \quad (3.34)$$

$$\rho_\varepsilon(t, x) \geq \eta_{T,R} \quad \text{pour } 0 \leq t \leq T, \quad -R < x < R, \quad (3.35)$$

avec $F, A, Q, \eta_{T,R} > 0$ des constantes indépendantes de ε . Alors notant $U_\varepsilon = (\rho_\varepsilon, \rho_\varepsilon u_\varepsilon) = \int_{\mathbb{R}} f_\varepsilon d\xi$, il existe une sous-suite telle que $\rho_\varepsilon \rightarrow \rho$ et $\rho_\varepsilon u_\varepsilon \rightarrow \rho u$ p.p., avec $(\rho, \rho u)$ une solution de (1.3) de donnée initiale $(\rho^0, \rho^0 u^0) = w\text{-lim} \int f_\varepsilon^0 d\xi$. En ce qui concerne les entropies, la solution limite vérifie

$$\partial_t \eta(U) + \partial_x G(U) = m_\eta \in \mathcal{M}_{loc} \quad (3.36)$$

pour toute entropie η . La mesure m_η est négative pour $\eta = \eta^e$.

Supprimer les hypothèses (3.33)-(3.35) reste un problème ouvert pour l'instant. Détaillons les idées utiles pour montrer ce résultat. Commençons tout d'abord par le lemme de moyenne annoncé.

3.2 Un lemme de moyenne adapté aux équations BGK

Nous reviendrons plus en détail sur le contexte des lemmes de moyenne dans la section 7.1. Le lemme obtenu ici est adapté au cas d'une équation avec un second membre de type BGK. Afin d'obtenir le plus de régularité possible, nous utilisons une transformation de Fourier dans la variable x seulement suivant l'idée de [44].

Théorème 3.2 ([23]) *Soit $a \in L_{loc}^\infty(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$ et $\psi \in L^2(\mathbb{R}^m)$, telle que pour des valeurs de $K \geq 0$ et $0 < \alpha \leq 1$, on ait*

$$\forall \sigma \in S^{n-1}, \forall z \in \mathbb{R}, \forall \eta > 0, \quad \int_{z < a(\xi) \cdot \sigma < z + \eta} |\psi(\xi)|^2 d\xi \leq K\eta^\alpha. \quad (3.37)$$

Soit $f \in C([0, T], L^2(\mathbb{R}_x^n \times \mathbb{R}_\xi^m))$ solution de

$$\partial_t f + \operatorname{div}_x [a(\xi) f] = \frac{h - f}{\varepsilon} + g \quad \text{dans }]0, T[\times \mathbb{R}_x^n \times \mathbb{R}_\xi^m, \quad (3.38)$$

avec $g, h \in L^2(]0, T[\times \mathbb{R}_x^n \times \mathbb{R}_\xi^m)$ et pour des données initiales $f(0, \cdot) = f^0$. Notons

$$\rho_\psi(t, x) = \int_{\mathbb{R}^m} f(t, x, \xi) \psi(\xi) d\xi \in C([0, T], L^2(\mathbb{R}_x^n)). \quad (3.39)$$

Alors, pour p.p. k ,

$$\begin{aligned} & \left(\int_0^T |\widehat{\rho_\psi}(t, k)|^2 dt \right)^{1/2} \\ & \leq \frac{C\sqrt{K}}{|k|^{\alpha/2}} \left[\varepsilon^{\frac{1-\alpha}{2}} \left(\int |\widehat{f^0}|^2 d\xi \right)^{1/2} + \left(\int |\widehat{f^0}|^2 d\xi \right)^{\alpha/2} \left(\int_0^T \int |\widehat{h}|^2 dt d\xi \right)^{\frac{1}{2}(1-\alpha)} \right. \\ & \quad + \varepsilon^{1-\frac{\alpha}{2}} \left(\int_0^T \int |\widehat{g}|^2 dt d\xi \right)^{1/2} + \left(\int_0^T \int |\widehat{h}|^2 dt d\xi \right)^{\frac{1}{2}(1-\frac{\alpha}{2})} \left(\int_0^T \int |\widehat{g}|^2 dt d\xi \right)^{\alpha/4} \\ & \quad \left. + \frac{1}{\varepsilon^{\alpha/2}} \left(\int_0^T \int |\widehat{h}|^2 dt d\xi \right)^{\frac{1}{2}(1-\frac{\alpha}{2})} \left(\int_0^T \int |\widehat{h} - \widehat{f}|^2 dt d\xi \right)^{\alpha/4} \right]. \quad (3.40) \end{aligned}$$

Notons que pour $\alpha = 1$, ceci donne une estimation dans $H_x^{1/2}$. Appliquant ce résultat vectoriellement avec $a(\xi) = \xi$ et $\psi \in C_c(\mathbb{R})$, $0 \leq \psi \leq 1$, telle que $\psi = 1$ sur le support en ξ de f_ε , (3.37) est vérifiée avec $\alpha = 1$, $K = 1$ et $\rho_\psi = \int f_\varepsilon \psi(\xi) d\xi = U_\varepsilon$. Avec $h = M[f_\varepsilon]$ et $g = 0$, nous obtenons

$$\|U_\varepsilon\|_{\dot{H}_x^{1/2}(]0, T[\times \mathbb{R})} \leq C \left[\|f_\varepsilon^0\|_{L_{x,\xi}^2} + \|M[f_\varepsilon]\|_{L_{t,x,\xi}^2}^{1/2} \left\| \frac{M[f_\varepsilon] - f_\varepsilon}{\varepsilon} \right\|_{L_{t,x,\xi}^2}^{1/2} \right]. \quad (3.41)$$

Ceci montre comment la structure BGK est préservée au maximum tout en conservant une régularité $H^{1/2}$.

3.3 Estimation du gradient et convergence

La première étape de la preuve du Théorème 3.1 consiste à prouver (3.31) ce qui provient d'une étude très technique de la dissipation d'entropie. Combinant ceci avec le lemme de moyenne de la section précédente (3.41), il vient

$$\|U_\varepsilon\|_{\dot{H}_x^{1/2}(]0,T[\times\mathbb{R})} \leq C_T \varepsilon^{-1/4}. \quad (3.42)$$

Pour $\lambda \geq 1$, $M(\cdot, \xi)$ est Lipschitzienne et on trouve

$$\|\zeta_R(x)M[f_\varepsilon]\|_{H_x^{1/2}(]0,T[\times\mathbb{R}_x\times\mathbb{R}_\xi)} \leq C_{T,R} \varepsilon^{-1/4} \quad (3.43)$$

avec $\zeta_R(x) \in C_c^\infty$, $\zeta_R \geq 0$, tel que $\zeta_R(x) = 1$ pour $-R \leq x \leq R$. Utilisant la formule des caractéristiques, on obtient

$$\|\zeta_R(x)f_\varepsilon\|_{H_x^{1/2}(]0,T[\times\mathbb{R}_x\times\mathbb{R}_\xi)} \leq C_{T,R} \varepsilon^{-1/4}. \quad (3.44)$$

Utilisant à nouveau le lemme de moyenne, il vient

$$\|\zeta_R \partial_x U_\varepsilon\|_{L_{t,x}^2} \leq C_{T,R} \left[\varepsilon^{-1/2} + \varepsilon^{-1/4} \|\zeta_R \partial_x U_\varepsilon\|_{L_{t,x}^2}^{1/2} \right], \quad (3.45)$$

ce qui donne $\iint_{]0,T[\times]-R,R[} |\partial_x U_\varepsilon|^2 dt dx \leq \frac{C_{T,R}}{\varepsilon}$. Multipliant l'équation cinétique par ξ , appli-

quant le lemme de moyenne et utilisant $\partial_t U_\varepsilon + \partial_x \int \xi f_\varepsilon d\xi = 0$, nous prouvons finalement les estimations de gradient suivantes : il existe des constantes $C_{T,R} > 0$, indépendantes de ε , telles que

$$\iint_{]0,T[\times]-R,R[} |\partial_x U_\varepsilon|^2 dt dx + \iint_{]0,T[\times]-R,R[} |\partial_t U_\varepsilon|^2 dt dx \leq \frac{C_{T,R}}{\varepsilon}. \quad (3.46)$$

Nous adaptons ensuite la technique de DiPerna. Intégrant (1.9) par rapport à ξ , il vient

$$\partial_t U_\varepsilon + \partial_x F(U_\varepsilon) = \partial_x \int_{\mathbb{R}} \xi (M[f_\varepsilon] - f_\varepsilon) d\xi. \quad (3.47)$$

Pour toute entropie régulière, ceci entraîne

$$\begin{aligned} & \partial_t \eta(U_\varepsilon) + \partial_x G(U_\varepsilon) \\ &= \eta'(U_\varepsilon) \cdot \partial_x \int_{\mathbb{R}} \xi (M[f_\varepsilon] - f_\varepsilon) d\xi \\ &= -\eta''(U_\varepsilon) \cdot \partial_x U_\varepsilon \cdot \int_{\mathbb{R}} \xi (M[f_\varepsilon] - f_\varepsilon) d\xi + \partial_x \left[\eta'(U_\varepsilon) \cdot \int_{\mathbb{R}} \xi (M[f_\varepsilon] - f_\varepsilon) d\xi \right]. \end{aligned}$$

Le premier terme de cette décomposition fournit des mesures bornées dans \mathcal{M}_{loc} uniformément par rapport à ε selon

$$\begin{aligned} & \iint_{]0,T[\times]-R,R[} |\partial_x U_\varepsilon| \cdot \left| \int_{\mathbb{R}} \xi (M[f_\varepsilon] - f_\varepsilon) d\xi \right| dt dx \\ & \leq C \|\partial_x U_\varepsilon\|_{L^2(]0,T[\times]-R,R[)} \|M[f_\varepsilon] - f_\varepsilon\|_{L_{t,x,\xi}^2} \leq C_{T,R}. \end{aligned} \quad (3.48)$$

Le second terme vérifie

$$\eta'(U_\varepsilon) \cdot \int_{\mathbb{R}} \xi(M[f_\varepsilon] - f_\varepsilon) d\xi \rightarrow 0 \text{ dans } L^p_{t,x}, \text{ quand } \varepsilon \rightarrow 0. \quad (3.49)$$

Nous obtenons ainsi des estimations de la forme (3.32) et la compacité par compensation selon [145] permet de conclure.

Dans la section 12, nous étudierons la convergence d'un schéma numérique associée à ce modèle.

4 Méthode d'entropie relative par contrôle du flux relatif

Dans cette section, nous présentons une autre direction de preuves pour ce type de limites hydrodynamiques. La technique proposée est de type entropie relative et est générale à partir du moment où le système étudié possède un contrôle du flux relatif par l'entropie relative. Cette technique permet de bien séparer les effets de la dissipation cinétique du contrôle des non-linéarités. Nous illustrerons ensuite cette technique sur deux exemples significatifs, celui où le système limite est la dynamique des gaz isentropiques, et celui de l'équation de Boltzmann discrète vers les équations d'Euler. Commençons par présenter le premier cadre de travail.

4.1 Limite hydrodynamique sans hypothèse de support en vitesse

Nous nous intéressons à la limite d'une équation de type BGK ou Fokker-Planck vers la dynamique des gaz isentropiques. Les équations cinétiques considérées sont donc

$$\partial_t f_\varepsilon + \xi \cdot \nabla_x f_\varepsilon + F(x) \cdot \nabla_\xi f_\varepsilon = \frac{Qf_\varepsilon}{\varepsilon}, \quad (4.50)$$

avec $f_\varepsilon = f_\varepsilon(t, x, \xi) \in \mathbb{R}$ pour $t \in \mathbb{R}^+$, $x, \xi \in \mathbb{R}^n$ ($m = n$). Le terme de force $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ est supposé donné. Pour le modèle BGK,

$$Qf = M_f - f, \quad (4.51)$$

où la fonction d'équilibre M_f est définie par

$$M_f(t, x, \xi) = M(\rho(t, x), \rho u(t, x), \xi), \quad (\rho, \rho u)(t, x) = \int_{\mathbb{R}^n} (1, \xi) f(t, x, \xi) d\xi, \quad (4.52)$$

et la Maxwellienne $M : \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ donnée par

$$M(\rho, \rho u, \xi) = \mathbf{1}_{|u-\xi|^n \leq c_n \rho} \quad \text{pour } \gamma = \frac{n+2}{n}, \quad (4.53)$$

$$M(\rho, \rho u, \xi) = c \left(\frac{2\gamma}{\gamma-1} \rho^{\gamma-1} - |\xi - u|^2 \right)_+^{d/2} \quad \text{sinon,} \quad (4.54)$$

avec $d = 2/(\gamma - 1) - n$. L'entropie cinétique est

$$H(f, \xi) = \frac{|\xi|^2}{2} f, \quad \text{pour } \gamma = \frac{n+2}{n}, \quad (4.55)$$

$$H(f, \xi) = \frac{|\xi|^2}{2} f + \frac{1}{2c^{2/d}} \frac{f^{1+2/d}}{1+2/d} \quad \text{sinon.} \quad (4.56)$$

Voir [40] pour plus de détails sur ces modèles. L'équation de Fokker-Planck s'écrit quand à elle

$$Qf = \operatorname{div}_\xi((\xi - u)f + \nabla_\xi f), \quad (4.57)$$

où

$$(\rho, \rho u)(t, x) = \int_{\mathbb{R}^n} (1, \xi) f(t, x, \xi) d\xi. \quad (4.58)$$

L'entropie cinétique est ici

$$H(f, \xi) = \left(\frac{1}{2}|\xi|^2 + \ln f\right) f. \quad (4.59)$$

Finalement la limite hydrodynamique attendue est (1.3) avec ajout d'un terme de champ externe, à savoir

$$\begin{cases} \partial_t \rho + \operatorname{div}_x(\rho u) = 0, & t \in \mathbb{R}^+, x \in \mathbb{R}^n, \\ \partial_t(\rho u) + \operatorname{div}_x(\rho u \otimes u + I\rho^\gamma) = \rho F, & t \in \mathbb{R}^+, x \in \mathbb{R}^n, \end{cases} \quad (4.60)$$

pour $1 \leq \gamma \leq \frac{n+2}{n}$, et le champ externe de force F . L'entropie associée est

$$\eta(\rho, \rho u) = \rho \frac{u^2}{2} + h(\rho), \quad (4.61)$$

avec $h(\rho) = \frac{1}{\gamma-1} \rho^\gamma$ pour $\gamma > 1$ et $h(\rho) = \rho \ln \rho$ pour $\gamma = 1$. Notons que le cas $n = 2$, $\gamma = 2$ et $Z' = F$ où Z est la topographie correspond au système de Saint-Venant avec topographie.

Les résultats obtenus (voir [30]) sont locaux en temps car valables sur l'intervalle de temps pour lequel la solution de (4.60) reste régulière. Il est à noter que l'on considère ici des gaz compressibles et même l'existence d'une solution de (4.60) après les chocs n'est pas connue dans le cas multi dimensionnel.

L'équation de Fokker-Planck permet de traiter le cas isotherme ($\gamma = 1$) et l'équation BGK considère les autres valeurs de γ .

Le principal résultat [30] obtenu dans ce cadre est le suivant.

Théorème 4.1 ([30]) *Soit $F \in C^2(\mathbb{R}^n) \cap L^\infty(\mathbb{R}^n)$. Soit $(\rho^0, \rho^0 u^0) \in L^1(\mathbb{R}^n)$ la donnée initiale d'une solution $U = (\rho, \rho u) \in C^1([0, T[\times \mathbb{R}^n) \cap L^1([0, T[\times \mathbb{R}^n)$ de (4.60) telle que $\rho > 0$, ρ , u , $\partial_x \rho$, $\partial_x u$ sont bornées par rapport à (t, x) et ρu^2 , $h(\rho)$ sont intégrables par rapport à (t, x) . Considérons une famille de données initiales cinétiques f_ε^0 vérifiant $f_\varepsilon^0 \in L^1(\mathbb{R}^{2n})$, $H(f_\varepsilon^0, \xi) \in L^1(\mathbb{R}^{2n})$. Supposons qu'elles vérifient*

$$\int_{\mathbb{R}^n} (f_\varepsilon^0, \xi f_\varepsilon^0, H(f_\varepsilon^0, \xi)) d\xi \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} (\rho^0, \rho^0 u^0, \rho^0 (u^0)^2 / 2 + h(\rho^0)) \quad \text{dans } L^1(\mathbb{R}^n).$$

Soit f_ε la solution de l'équation BGK (4.50) et (4.51) pour $1 < \gamma \leq n/(n+2)$ ou la solution de l'équation de Fokker-Planck (4.50) et (4.57) pour le cas isotherme ($\gamma = 1$).

Posons $(\rho_\varepsilon, \rho_\varepsilon u_\varepsilon) = \int_{\mathbb{R}^n} (1, \xi) f_\varepsilon d\xi$. Alors ρ_ε converge fortement dans $C^0(0, T; L^p_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n))$ vers ρ pour tout $1 \leq p < \gamma$ et $\rho_\varepsilon u_\varepsilon$ converge fortement vers ρu dans $C^0(0, T; L^q_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n))$ pour tout $1 \leq q < 2\gamma/(\gamma + 1)$.

Il est à noter qu'aucune hypothèse sur le support en ξ des f_ε n'est utile. Tout est contrôlé par la borne sur l'énergie.

4.2 Une méthode générale de preuve

Présentons maintenant en détail la technique. Elle est de type méthode d'entropie relative. L'utilisation d'entropie relative a été utilisée pour le principe d'unicité faible-fort et la stabilité établie par Dafermos [67] et DiPerna [75] pour les systèmes de lois de conservation hyperbolique multidimensionnels admettant une entropie convexe, et également pour les systèmes de particules et la dynamique des gaz raréfiés (voir Yau [197], Golse, Levermore et Saint-Raymond [100], Saint-Raymond [183], Olla, Varadhan et Yau [163], Goudon, Jabin et Vasseur [108]). Ceci porte aussi le nom d'énergie modulée (voir Brenier [49], [50] et Masmoudi [152]). Elle est proche également des solutions dissipatives pour l'équation d'Euler de Lions [140]. Le lecteur intéressé pourra consulter également sur cette technique les articles [53], [123], [134].

La méthode de preuve que nous proposons est en fait assez générale et peut être utilisée pour d'autres problèmes dès que des hypothèses de structure au niveau cinétique et au niveau du système limite sont vérifiées. Nous allons maintenant présenter le schéma de la preuve afin de faire ressortir ces hypothèses de structure.

Considérons les lois de conservation

$$\partial_t U + \text{div}_x F(U) = Q(U, x), \quad (4.62)$$

avec $U(t, x) \in \mathcal{U} \subset \mathbb{R}^k$ pour $t \in \mathbb{R}^+$, $x \in \mathbb{R}^n$, $F : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}^k$ et $Q : \mathcal{U} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k$. Supposons que ce système possède un couple d'entropie-flux d'entropie (η, G) avec $\eta \in C^2(\mathcal{U}, \mathbb{R})$ convexe. Considérons l'équation cinétique un peu plus générale que (4.50), à savoir

$$\partial_t f_\varepsilon + \xi \cdot \nabla_x f_\varepsilon + q(f_\varepsilon) = \frac{\mathcal{Q}(f_\varepsilon, \xi)}{\varepsilon}, \quad (4.63)$$

avec $f_\varepsilon = f_\varepsilon(t, x, \xi) \in \mathbb{R}$ pour $t \in \mathbb{R}^+$, $x, \xi \in \mathbb{R}^n$ ($m = n$) et q un opérateur linéaire, $\mathcal{Q} : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ et $a : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k$, où le terme de collision \mathcal{Q} satisfait

$$\int_{\mathbb{R}^n} a(\xi) \mathcal{Q}(f, \xi) d\xi = 0, \text{ pour tout } f \in \mathbb{R}. \quad (4.64)$$

Supposons que ce système possède une entropie cinétique $H : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ qui soit compatible avec l'entropie η du système hyperbolique au sens suivant

$$\frac{d}{dt} \iint_{\mathbb{R}^{2n}} H(f_\varepsilon, \xi) d\xi dx \leq \int_{\mathbb{R}^n} \eta'(U_\varepsilon) Q(U_\varepsilon) dx, \quad (4.65)$$

où

$$U_\varepsilon(t, x) = \int_{\mathbb{R}^n} a(\xi) f_\varepsilon(t, x, \xi) d\xi, \quad (4.66)$$

et

$$\eta(U_\varepsilon) \leq \int_{\mathbb{R}^n} H(f_\varepsilon, \xi) d\xi. \quad (4.67)$$

Finalement, on demande à l'entropie de contrôler les flux, à savoir

$$\left| \int_{\mathbb{R}^n} \left(|a(\xi)| + |a(\xi) \otimes \xi| \right) f_\varepsilon d\xi + \int_{\mathbb{R}^n} a(\xi) q(f_\varepsilon) d\xi \right| \leq \int_{\mathbb{R}^n} \left(f_\varepsilon + H(f_\varepsilon, \xi) \right) d\xi. \quad (4.68)$$

Suivant les notations de Dafermos, pour toute fonction $\Phi \in C^1(\mathbb{R}^k)$ de U , la quantité relative associée sera notée $\Phi(\cdot|\cdot) \in C^0(\mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^k)$:

$$\Phi(U_1|U_2) = \Phi(U_1) - \Phi(U_2) - \nabla\Phi(U_2)(U_1 - U_2). \quad (4.69)$$

Le résultat abstrait [30] que nous obtenons et qui soutient la méthode est le suivant.

Théorème 4.2 ([30]) *Soit $U \in [C^1([0, T] \times \mathbb{R}^n)]^k$ une solution forte sur $[0, T]$ du système hyperbolique multidimensionnel (4.62), système possédant une entropie η convexe de classe C^2 , avec une donnée initiale U^0 . Supposons que U , $\eta'(U)$ et $\partial_x \eta'(U)$ sont bornées et que U et $\eta(U)$ sont intégrables par rapport à x . Soit f_ε solution de l'équation cinétique (4.63), satisfaisant (4.64)-(4.68) et $f_\varepsilon + H(f_\varepsilon, \xi)$ intégrable par rapport à x et ξ pour tout t . Posons*

$$U_\varepsilon(t, x) = \int_{\mathbb{R}^n} a(\xi) f_\varepsilon(t, x, \xi) d\xi.$$

Supposons la convergence des données initiales

$$\int_{\mathbb{R}^n} \eta(U_\varepsilon^0|U^0) dx \leq C_0 \sqrt{\varepsilon}, \quad (4.70)$$

et la compatibilité des données initiales

$$\left| \int_{\mathbb{R}^n} H(f_\varepsilon^0, \xi) d\xi - \eta(U_\varepsilon^0) \right| \leq C_0 \sqrt{\varepsilon}. \quad (4.71)$$

Supposons le contrôle des quantités cinétiques selon

$$\int_0^T \int_{\mathbb{R}^n} \left| F(U_\varepsilon) - \int_{\mathbb{R}^n} \xi \otimes a(\xi) f_\varepsilon d\xi \right| dx dt \leq C_1 \sqrt{\varepsilon}, \quad (4.72)$$

$$\int_0^T \int_{\mathbb{R}^n} \left| Q(U_\varepsilon, x) + \int_{\mathbb{R}^n} a(\xi) q(f_\varepsilon) d\xi \right| dx dt \leq C_1 \sqrt{\varepsilon}, \quad (4.73)$$

et le contrôle des flux relatifs et des termes sources par l'entropie relative selon

$$|F(U_\varepsilon|U)| \leq C_2 \eta(U_\varepsilon|U), \quad (4.74)$$

$$|Q(U)\eta'(U_\varepsilon|U) + [Q(U_\varepsilon) - Q(U)](\eta'(U_\varepsilon) - \eta'(U))| \leq C_2 \eta(U_\varepsilon|U), \quad (4.75)$$

avec C_1 et C_2 des constantes positives, alors on obtient, avec C une constante, la convergence de U_ε vers U selon

$$\int_{\mathbb{R}^n} \eta(U_\varepsilon|U)(t, x) dx \leq C \sqrt{\varepsilon} \text{ pour tout } t \in [0, T]. \quad (4.76)$$

Ce résultat fait apparaître pour quels systèmes notre technique de preuve va pouvoir fonctionner, à savoir qu'il faut les conditions de structure (4.74) et (4.75) pour le système (4.62), c'est-à-dire principalement le contrôle du flux relatif par l'entropie relative. Ce résultat montre également quelles équations cinétiques vont pouvoir fonctionner pour la limite hydrodynamique avec notre technique, à savoir les équations cinétiques (4.63) dont la dissipation d'entropie entraîne les estimations (4.72) et (4.73). Notons que ce résultat permet de séparer les effets de la dissipation cinétique du contrôle des non-linéarités. Notons également qu'en ce qui concerne le système limite, seule sa structure propre intervient et pas le choix de l'équation cinétique qui l'approche. Plus précisément, pour appliquer la méthode, le système doit vérifier les hypothèses de structure :

$$|F(V|U)| \leq C_2 \eta(V|U), \quad \forall U, V \quad (4.77)$$

$$|Q(U)\eta'(V|U) + [Q(V) - Q(U)](\eta'(V) - \eta'(U))| \leq C_2 \eta(V|U), \quad \forall U, V, \quad (4.78)$$

ceci indépendamment de l'approximation cinétique utilisée. Pour ces systèmes, il convient alors d'utiliser une équation cinétique pour laquelle, on obtient une dissipation de la forme (4.72) ce qui par exemple dans le cas d'équation BGK revient à savoir si la dissipation d'entropie va entraîner une estimation de la forme

$$\int_0^T \int_{\mathbb{R}^n} \left| \int_{\mathbb{R}^n} \xi \otimes a(\xi)(Mf_\varepsilon - f_\varepsilon) d\xi \right| dx dt \leq C_1 \sqrt{\varepsilon}. \quad (4.79)$$

Cette dernière inégalité est alors purement cinétique.

Le schéma de la preuve de ce résultat est donné par le calcul de l'évolution de l'entropie relative

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} \int_{\mathbb{R}^n} \eta(U_\varepsilon|U) + \int_{\mathbb{R}^n} H(f_\varepsilon, \xi) d\xi - \eta(U_\varepsilon) dx \\ & \leq - \int_{\mathbb{R}^n} \eta'(U) \cdot [\partial_t U_\varepsilon + \operatorname{div}_x F(U_\varepsilon) - Q(U_\varepsilon)] dx \\ & \quad - \int_{\mathbb{R}^n} \sum_{jk} \partial_{x_k} [\partial_j \eta(U)] F_{jk}(U_\varepsilon|U) dx \\ & \quad + \int_{\mathbb{R}^n} Q(U)\eta'(U_\varepsilon|U) dx \\ & \quad + \int_{\mathbb{R}^n} [Q(U_\varepsilon) - Q(U)](\eta'(U_\varepsilon) - \eta'(U)) dx, \end{aligned}$$

et celui des moments de f_ε , à savoir

$$\begin{aligned} \partial_t U_\varepsilon + \operatorname{div}_x F(U_\varepsilon) - Q(U_\varepsilon) &= \operatorname{div}_x \left(F(U_\varepsilon) - \int_{\mathbb{R}^n} \xi \otimes a(\xi) f_\varepsilon d\xi \right) \\ & \quad - \left[\int_{\mathbb{R}^n} a(\xi) q(f_\varepsilon) d\xi + Q(U_\varepsilon) \right]. \end{aligned}$$

Notant $\Delta_\varepsilon = \eta(U_\varepsilon|U) + \int_{\mathbb{R}^n} H(f_\varepsilon, \xi) d\xi - \eta(U_\varepsilon)$, l'inégalité suivante est alors obtenue

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{\mathbb{R}^n} \Delta_\varepsilon(t, x) dx &\leq C(U) \left(\int_{\mathbb{R}^n} \left| F(U_\varepsilon) - \int_{\mathbb{R}^n} \xi \otimes a(\xi) f_\varepsilon d\xi \right| dx \right. \\ &\quad \left. + \int_{\mathbb{R}^n} \left| Q(U_\varepsilon) + \int_{\mathbb{R}^n} a(\xi) q(f_\varepsilon) d\xi \right| dx \right. \\ &\quad \left. + 2C_2 \int_{\mathbb{R}^n} \eta(U_\varepsilon|U) dx \right), \end{aligned}$$

ce qui entraîne alors, pour $t \in [0, T]$,

$$\begin{aligned} &\int_{\mathbb{R}^n} \Delta_\varepsilon(t, x) dx \\ &\leq \int_{\mathbb{R}^n} \Delta_\varepsilon(0, x) dx + 2C(U)C_1\sqrt{\varepsilon} + 2C(U)C_2 \int_0^t \int_{\mathbb{R}^n} \Delta_\varepsilon(s, x) dx ds, \end{aligned}$$

et un lemme de Gronwall permet de conclure.

4.3 Application de la méthode pour les gaz isentropiques

Montrons maintenant que le système des gaz isentropiques (4.60) vérifie les hypothèses de compatibilité de structure et que les équations cinétiques (4.50) associées à (4.51) et (4.57) entraînent bien les propriétés de dissipations souhaitées.

Tout d'abord, en ce qui concerne le système (4.60), le flux relatif du système

$$F((\rho_1, \rho_1 u_1)|(\rho_2, \rho_2 u_2)) = (0, \rho_1(u_1 - u_2) \otimes (u_1 - u_2) + h(\rho_1|\rho_2)I) \quad (4.80)$$

est bien contrôlé par l'entropie relative

$$\eta((\rho_1, \rho_1 u_1)|(\rho_2, \rho_2 u_2)) = \frac{\rho_1}{2} |u_1 - u_2|^2 + h(\rho_1|\rho_2). \quad (4.81)$$

Maintenant, intéressons-nous aux dissipations d'entropie des solutions cinétiques. Tout d'abord, dans le cas des modèles BGK, les entropies (4.56) sont bien compatibles avec l'entropie η du système des gaz isentropiques au sens de (4.65)-(4.67). Le calcul de l'évolution de l'entropie cinétique donne

$$\begin{aligned} &\int_0^T \int_{\mathbb{R}^n} \left| F(U_\varepsilon) - \int_{\mathbb{R}^n} \xi \otimes a(\xi) f_\varepsilon d\xi \right| dx dt \\ &= \int_0^T \int_{\mathbb{R}^n} \left| \int_{\mathbb{R}^n} \xi \otimes a(\xi) (Mf_\varepsilon - f_\varepsilon) d\xi \right| dx dt, \end{aligned} \quad (4.82)$$

et nous obtenons le contrôle de la dissipation suivant.

Proposition 4.3 ([30]) *Soit f_ε solution de l'équation (4.50) avec (4.51) pour des données initiales f_ε^0 bornées dans $L^1(\mathbb{R}^{2n})$ et telles que*

$$\iint_{\mathbb{R}^{2n}} |\xi|^2 f_\varepsilon^0(x, \xi) d\xi dx \leq C^0 < \infty. \quad (4.83)$$

Alors il existe C_n telle que, pour tout $\varepsilon < 1$,

$$\int_0^T \int_{\mathbb{R}^n} \left| \int_{\mathbb{R}^n} \xi \otimes a(\xi) (Mf_\varepsilon - f_\varepsilon) d\xi \right| dx dt \leq C_n \sqrt{\varepsilon}.$$

Nous obtenons une estimation similaire dans le cas de l'équation de Fokker-Planck.

Notons pour finir cette partie que le système d'Euler complet (1.2) ne vérifie pas (4.74) et la méthode ne peut ainsi s'appliquer directement pour la convergence de l'équation de Boltzmann vers le système d'Euler complet. De plus, le problème du contrôle des grandes vitesses cinétiques se pose aussi dans ce cas afin d'obtenir (4.72) et (4.73).

Néanmoins, la méthode proposée dans ce travail se révèle assez solide pour s'adapter au cas de la convergence de Boltzmann discret vers un système de type Euler, c'est l'objet de la section suivante.

5 Boltzmann discret vers Euler

5.1 Modèle de Boltzmann discret

Les équations de type Boltzmann discret ont été beaucoup étudiées (voir Cabannes, Gatignol et Luo [54] ou Platkwoski et Illner [177] et les références contenues dans ces articles) car elles offrent des simplifications appréciables et proposent malgré tout de bonnes similarités avec le modèle continu. Le problème de l'existence de solutions aux équations de Boltzmann discrètes a été étudié, aussi bien dans le cas de la dimension un en espace [14], [37], [114] que du cas multidimensionnel [38], [89].

Les équations de Boltzmann discrète en vitesse s'écrivent selon

$$\partial_t f_i + \xi_i \partial_x f_i = \frac{1}{\varepsilon} Q_i(f, f), \quad \text{pour } i = 1, \dots, N, \quad (5.84)$$

avec le noyau de collision

$$Q_i(f, f) = \sum_{jkl} S_{ijkl} (f_k f_l - f_i f_j), \quad (5.85)$$

et pour un nombre de vitesses $N \geq 3$. Le système de loi de conservation attendu à la limite est

$$\begin{cases} \partial_t \rho + \partial_x(\rho u) = 0, & t \in \mathbb{R}^+, x \in \mathbb{R}, \\ \partial_t(\rho u) + \partial_x(\rho E) = 0, & t \in \mathbb{R}^+, x \in \mathbb{R}, \\ \partial_t(\rho E) + \partial_x(\rho J(u, E)) = 0 & t \in \mathbb{R}^+, x \in \mathbb{R}. \end{cases} \quad (5.86)$$

Il s'agit d'un système de la forme d'Euler avec la fermeture pour $J(u, E)$ donnée par $J(u, E) = \frac{\partial_{bc}\psi}{\psi}$ où ψ est telle que $u = \partial_b(\ln \psi)$, $E = \partial_c(\ln \psi)$, ce qui a bien un sens grâce à

Lemme 5.1 ([29]) *La fonction $\ln \psi$ est régulière et strictement convexe et l'application $T : (b, c) \rightarrow (u, E)$ définie par*

$$T(b, c) = \nabla_{(b,c)} \ln \psi(b, c)$$

est un C^1 difféomorphisme de \mathbb{R}^2 vers \mathcal{U} l'ensemble des valeurs admissibles pour (u, E) .

La limite hydrodynamique $\varepsilon \rightarrow 0$ a été justifiée dans le cas du modèle de Broadwell par Calfisch et Papanicolaou [56] et la limite en temps grand de (5.84) vers des Maxwelliennes a été obtenue dans les travaux de Beale [14] et Kawashima [125].

Nous faisons les hypothèses suivantes sur le modèle. Les coefficients d'interaction S_{ijkl} vérifient des propriétés de symétrie et de réversibilité,

$$S_{ijkl} = S_{jikl}, \quad S_{ijkl} = S_{ijlk}, \quad (5.87)$$

$$S_{ijkl} = S_{klij}, \quad (5.88)$$

et afin qu'une collision élastique $(i, j) \mapsto (k, l)$ conserve la masse, la quantité de mouvement et l'énergie, on suppose

$$\xi_k + \xi_l = \xi_i + \xi_j, \quad \xi_k^2 + \xi_l^2 = \xi_i^2 + \xi_j^2 \quad \text{si } S_{ijkl} \neq 0. \quad (5.89)$$

Ceci implique sur le modèle,

$$\sum_i Q_i = 0, \quad \sum_i \xi_i Q_i = 0, \quad \sum_i \xi_i^2 Q_i = 0, \quad (5.90)$$

ce qui entraîne les lois de conservation de la masse, de la quantité de mouvement et de l'énergie au niveau cinétique. Considérons la matrice de collision $B \in \{-1, 0, 1\}^{N^2 \times N^2}$ définie par

$$\begin{aligned} B_{ij,i} = B_{ij,j} = -B_{ij,k} = -B_{ij,l} = 1 & \quad \text{si } S_{ijkl} \neq 0, \\ B_{ij,k} = 0 & \quad \text{sinon.} \end{aligned}$$

Les relations (5.90) impliquent que $(1, \dots, 1)$, (ξ_1, \dots, ξ_N) et $(\xi_1^2, \dots, \xi_N^2)$ sont dans le noyau de B . Nous ferons l'hypothèse suivante :

$$\text{Ker}(B) = \text{Vect} \{ (1, \dots, 1), (\xi_1, \dots, \xi_N), (\xi_1^2, \dots, \xi_N^2) \} \text{ et } \dim \text{Ker}(B) = 3, \quad (\text{H})$$

ce qui signifie que le modèle ne possède pas d'autres lois de conservation. Définissons enfin l'entropie de f par

$$\mathcal{H}(f) = \sum_{i=1}^N f_i \ln f_i.$$

Le résultat de convergence que nous obtenons s'énonce de la façon suivante.

Théorème 5.2 ([29]) *Soit (ρ_0, u_0, E_0) une fonction Lipschitzienne sur \mathbb{R} à valeurs dans $\mathbb{R}^+ \times \mathcal{U}$ telle que $U_0 = (\rho_0, \rho_0 u_0, \rho_0 E_0)$ et $\eta(\rho_0, \rho_0 u_0, \rho_0 E_0)$ sont dans $L^1(\mathbb{R})$ et $\partial_x U_0 \in L^2(\mathbb{R}) \cap L^\infty(\mathbb{R})$. Alors il existe un intervalle de temps maximal T^* telle que la solution $(\rho, \rho u, \rho E)$ du système limite (5.86) avec la donnée initiale (ρ_0, u_0, E_0) reste Lipschitzienne sur $[0, T^*[\times \mathbb{R}$. Notant \overline{M} la Maxwellienne associée à $(\rho, \rho u, \rho E)$. Soit $f_\varepsilon^0 \in (L^1(\mathbb{R}))^N$ à composantes positives et vérifiant $\mathcal{H}(f_\varepsilon^0)$ bornée dans $L^1(\mathbb{R})$. Notons f_ε la solution de (5.84) avec donnée initiale f_ε^0 . Si f_ε^0 converge fortement vers \overline{M}^0 , Maxwellienne associée à (ρ_0, u_0, E_0) , au sens*

$$\int_{\mathbb{R}} \mathcal{H}(f_\varepsilon^0 | \overline{M}^0)(x) dx \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 0,$$

alors f_ε converge fortement vers \overline{M} pour tout $T < T^*$ au sens

$$\sup_{0 \leq t \leq T} \int_{\mathbb{R}} \mathcal{H}(f_\varepsilon | \overline{M})(t, x) dx \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 0,$$

avec

$$\mathcal{H}(f|g) = \sum_i f_i \ln(f_i/g_i) - (f_i - g_i) \geq 0.$$

Présentons les idées de la preuve de ce résultat.

5.2 Estimation de la dissipation d'entropie et limite vers Euler

Notons $\eta(U) = \mathcal{H}(M(U))$ l'entropie du système, la relation suivante a lieu : il existe $C > 0$ telle que

$$|F(U|\bar{U})| \leq C\eta(U|\bar{U}) \quad \text{pour tout } U, \bar{U} \in \mathcal{U},$$

avec F le flux du système (5.86). Le critère de comparaison du flux relatif et de l'entropie relative au sens de la section 4.2 est donc bien réalisé et la mise en oeuvre de la méthode est possible.

Il reste à voir en quoi la dissipation d'entropie, qui s'écrit ici

$$D(f) = \frac{1}{4} \sum_{ijkl} S_{ijkl} \ln \left(\frac{f_k f_l}{f_i f_j} \right) (f_k f_l - f_i f_j) \geq 0, \quad (5.91)$$

permet d'estimer l'écart entre f_ε et M_ε . Nous prouvons le résultat assez technique suivant.

Proposition 5.3 ([29]) *Il existe une constante C telle que pour tout $f \in \mathbb{R}^N$, nous avons*

$$\sum_{i=1}^N |f_i - M_i| \leq C \sqrt{D(f)}, \quad (5.92)$$

avec $M = M(Pf)$ la Maxwellienne associée et $Pf = \sum_{i=1}^N (1, \xi_i, \xi_i^2) f_i$.

Montrons que la méthode de la section précédente peut s'étendre à cette étude discrète. Utilisons les notations suivantes : f_ε pour la solution de (5.84), $U_\varepsilon = (\rho_\varepsilon, \rho_\varepsilon u_\varepsilon, \rho_\varepsilon E_\varepsilon) = Pf_\varepsilon = \sum_{i=1}^N (1, \xi_i, \xi_i^2) (f_\varepsilon)_i$, $M_\varepsilon = M(U_\varepsilon)$, $V : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^N$ avec $V f_i = \xi_i f_i$ pour $i = 1, \dots, N$, $s(y) = y \ln y$, \bar{U} pour la solution régulière du système limite et $\bar{M} = \bar{M}(\bar{U})$ la Maxwellienne associée.

Nous obtenons les deux relations d'entropie

$$\partial_t \sum_{i=1}^N (f_\varepsilon)_i \ln (f_\varepsilon)_i + \partial_x \sum_{i=1}^N \xi_i (f_\varepsilon)_i \ln (f_\varepsilon)_i + \frac{D(f_\varepsilon)}{\varepsilon} = 0, \quad (5.93)$$

et

$$\partial_t \sum_{i=1}^N \bar{M}_i \ln \bar{M}_i + \partial_x \sum_{i=1}^N \xi_i \bar{M}_i \ln \bar{M}_i = 0, \quad (5.94)$$

ce qui permet de d'écrire l'évolution de l'entropie relative entre f_ε et \bar{M} :

$$\begin{aligned} & \partial_t \mathcal{H}(f_\varepsilon | \bar{M}) + \partial_x \sum_{i=1}^N \xi_i s((f_\varepsilon)_i | \bar{M}_i) + \frac{D(f_\varepsilon)}{\varepsilon} \\ &= -\partial_t \left(\partial_f \mathcal{H}(\bar{M}) \cdot (f_\varepsilon - \bar{M}) \right) - \partial_x \left(\partial_f \mathcal{H}(\bar{M}) \cdot (V f_\varepsilon - V \bar{M}) \right). \end{aligned}$$

Suivant l'article [191], nous obtenons

$$\frac{\partial \eta}{\partial U}(U) * w = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial f}(M(U)) \cdot f, \quad \text{pour tout } w \in \mathbb{R}^3, f \in \mathbb{R}^N \text{ tels que } w = Pf,$$

où $*$ est le produit scalaire dans \mathbb{R}^3 et \cdot celui dans \mathbb{R}^N , ce qui entraîne

$$\partial_t \mathcal{H}(f_\varepsilon | \overline{M}) + \partial_x \sum_{i=1}^N \xi_i s((f_\varepsilon)_i | \overline{M}_i) + \frac{D(f_\varepsilon)}{\varepsilon} \quad (5.95)$$

$$= -\partial_t \left(\partial_U \eta(\overline{U}) * P(f_\varepsilon - \overline{M}) \right) - \partial_x \left(\partial_U \eta(\overline{U}) * P(V f_\varepsilon - V \overline{M}) \right). \quad (5.96)$$

Utilisant alors les équations d'évolution et le fait que η est une entropie, ceci se réécrit sous la forme

$$\begin{aligned} \partial_t \mathcal{H}(f_\varepsilon | \overline{M}) + \partial_x \sum_{i=1}^N \xi_i s((f_\varepsilon)_i | \overline{M}_i) + \frac{D(f_\varepsilon)}{\varepsilon} \\ = -\partial_{UU}^2 \eta(\overline{U}) \partial_x(\overline{U}) * \left(F(U_\varepsilon | \overline{U}) + P(V f_\varepsilon - V M_\varepsilon) \right). \end{aligned} \quad (5.97)$$

Ceci entraîne une estimation en ε de la dissipation d'entropie

$$\int_0^t \int_{\mathbb{R}} D(f_\varepsilon) dx ds \leq C_T^0 \varepsilon, \quad \text{pour } 0 \leq t \leq T, \quad (5.98)$$

avec

$$\begin{aligned} C_T^0 = \sup_{\varepsilon} \left(\int_{\mathbb{R}} \mathcal{H}(f_\varepsilon^0 | \overline{M}^0)(x) dx \right) \\ + 4C_T \max(1, \sup_{i=1, \dots, N} |\xi_i^2|) \sup_{\varepsilon} \left(\int_{\mathbb{R}} f_\varepsilon^0(x) dx + \int_{\mathbb{R}} \overline{M}^0(x) dx \right). \end{aligned}$$

Utilisant

$$|F(U_\varepsilon | \overline{U})| \leq C_1 \eta(U_\varepsilon | \overline{U}) \leq C_1 \mathcal{H}(f_\varepsilon | \overline{M}),$$

et

$$|PV(f_\varepsilon - M_\varepsilon)|^2 \leq C_2 |f_\varepsilon - M_\varepsilon|^2 \leq C_3 D(f_\varepsilon),$$

par la Proposition 5.3, nous aboutissons à

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} \mathcal{H}(f_\varepsilon | \overline{M})(t, x) dx \\ \leq \int_{\mathbb{R}} \mathcal{H}(f_\varepsilon^0 | \overline{M}^0)(x) dx + C_4 \int_0^t \int_{\mathbb{R}} \mathcal{H}(f_\varepsilon | \overline{M})(s, x) dx ds + C_4 \sqrt{C_T^0 \varepsilon} \end{aligned}$$

ce qui, par un lemme de Gronwall, donne

$$\sup_{0 \leq t \leq T} \int_{\mathbb{R}} \mathcal{H}(f_\varepsilon | \overline{M})(t, x) dx \leq \left(\int_{\mathbb{R}} \mathcal{H}(f_\varepsilon^0 | \overline{M}^0) dx + C_5 \sqrt{\varepsilon} \right) e^{C_4 T}.$$

6 Limite en champ fort

Dans cette section, nous étudions maintenant une variante de la relaxation du modèle BGK de la section 1 dans le cas scalaire $k = 1$ qui présente des intérêts dans une optique des semi-conducteurs. En effet, récemment, différents scalings de l'équation de Vlasov ont

fait apparaître de nouveaux modèles (voir [3]) et en particulier le cas des équations avec un champ fort. Les premières études de tels modèles sont [178] et nous renvoyons à [159], [70] et leur références pour de tels problèmes. Des problèmes similaires se situent dans le domaine des champs magnétiques forts ([90], [105], [184]), des limites quasi-neutres pour les plasmas ([111], [49]) et de la friction forte ([120]).

6.1 Limites de relaxation BGK avec champ fort

Dans cette section, nous étudions la limite en champ fort de modèles cinétiques vers les lois de conservation scalaires. Plus précisément, il s'agit de la limite quand $\varepsilon \rightarrow 0$ du modèle BGK

$$\partial_t f + \operatorname{div}_x(a(x, \xi) f) + \frac{F(x)}{\varepsilon} \partial_\xi f = \frac{\chi_\rho - f}{\varepsilon}, \quad (t, x, \xi) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}, \quad (6.99)$$

avec χ définie par (1.7) et

$$\rho(t, x) = \int_{\mathbb{R}} f(t, x, \xi) d\xi.$$

On suppose que le champ de vitesse $a : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ ($m = 1$) et le champ de force scalaire $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ sont donnés.

Le point important est que le terme F/ε modifie la limite hydrodynamique obtenue. En effet, dans le cas traditionnel, c'est-à-dire avec $F = 0$, la limite est

$$\partial_t \rho + \operatorname{div}_x A(x, \rho) = 0, \quad A(x, \rho) = \int_0^\rho a(x, u) du. \quad (6.100)$$

tandis que dans le cas $F \neq 0$, nous prouvons que la limite est

$$\partial_t \rho + \operatorname{div}_x B(x, \rho) = 0, \quad (6.101)$$

avec

$$B(x, \rho) = \int_0^\rho \int_0^{+\infty} a(x, v + F(x)u) e^{-u} du dv. \quad (6.102)$$

De plus, nous proposons une très légère prise en compte d'effet "quantique" au sens où il est permis à la distribution cinétique f de pouvoir changer de signe tout en obligeant les observables macroscopiques, tels que la densité $\rho(t, x) = \int f(t, x, \xi) d\xi$, à rester positifs. En effet, ceci fait penser à la fonction de Wigner qui ne reste pas positive avant le passage à la limite semi-classique. Un second lien est que l'opérateur de Wigner vérifie à la limite $\Theta^h[U] \cdot f \xrightarrow{h \rightarrow 0} -\partial_x U \cdot \partial_\xi f$, et le terme limite est justement le terme de force.

Un autre aspect nouveau de ce travail est que l'équation scalaire obtenue étant modifiée, l'équilibre thermodynamique l'est également : quand $\varepsilon \rightarrow 0$, la distribution f ne converge pas vers la Maxwellienne χ_ρ mais vers une Maxwellienne modifiée M_ρ .

Il nous semble également qu'il s'agit de la première preuve de convergence d'équations cinétiques vers des lois de conservation avec un flux dépendant de x .

Nous prouvons les deux résultats suivants.

Le premier est multi-dimensionnel mais limité au cas $F(x) = F$.

Théorème 6.1 ([28]) *Soit $f^0 \in L^1(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R})$, $F \in \mathbb{R}$ constant et $a \in C_b^{2,1}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R})$. Alors $\rho_\varepsilon = \int_{\mathbb{R}} f_\varepsilon d\xi$, où f_ε est la solution du modèle BGK (6.99) avec la donnée de Cauchy*

$f_\varepsilon(0) = f^0$, vérifie que $\rho_\varepsilon \rightarrow \rho$ dans $L^1([0, T] \times K)$, pour tout compact K de \mathbb{R}^n , avec ρ solution de (6.101) pour B définie par (6.102) avec $\rho(0) = \rho^0 = \int_{\mathbb{R}} f^0 d\xi$. De plus, la fonction de distribution $f_\varepsilon \rightarrow M_\rho$ dans $L^1([0, T] \times K \times \mathbb{R})$ pour tout compact K de \mathbb{R}^n . En particulier, nous obtenons les entropies de Kružkov

$$\forall k \in \mathbb{R}, \quad \partial_t |\rho - k| + \operatorname{div}_x \left((B(x, \rho) - B(x, k)) \operatorname{sgn}(\rho - k) \right) + (\operatorname{div}_x B)(x, k) \operatorname{sgn}(\rho - k) \leq 0. \quad (6.103)$$

Le second autorise une dépendance en x de $F(x)$ mais est seulement en dimension un.

Théorème 6.2 Soit $f^0 \in L^1(\mathbb{R} \times \mathbb{R})$, $F \in C_b^1(\mathbb{R})$, $F' \in L^1(\mathbb{R})$, et $a \in C_b^{2,1}(\mathbb{R} \times \mathbb{R})$. Soit $\rho_\varepsilon = \int_{\mathbb{R}} f_\varepsilon d\xi$, où f_ε est solution du modèle (6.99) avec une donnée initiale f^0 . Nous supposons de plus que

$$\left(\int_{\mathbb{R}} |f_\varepsilon(t, x, \xi)| d\xi \right)_{\varepsilon > 0} \text{ est bornée dans } L^\infty([0, +\infty[\times \mathbb{R}). \quad (6.104)$$

Alors, à extraction d'une sous-suite près, $\rho_\varepsilon \rightarrow \rho$ dans $L^\infty(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n)$ faible *. La limite ρ est une solution faible de (6.101) avec B donnée par (6.102).

Si on suppose que $k \mapsto B(x, k)$ est non-linéaire (au sens qu'il n'existe aucun intervalle sur lequel la fonction est linéaire), $\rho_\varepsilon \rightarrow \rho$ a lieu pour toute la suite dans $L^1([0, T] \times K)$ pour tout $T > 0$ et tout compact $K \in \mathbb{R}$. De plus les inégalités d'entropie (6.103) sont vérifiées.

6.2 Limite formelle et Maxwellienne modifiée

Présentons tout d'abord la limite formelle afin de voir en quoi le terme de force fort modifie l'équilibre. Quand $\varepsilon \rightarrow 0$ dans (6.99), il s'avère que la limite f doit vérifier

$$F(x) \partial_\xi f = \chi_\rho - f. \quad (6.105)$$

L'intégration de (6.99) par rapport à ξ donne

$$\partial_t \int_{\mathbb{R}} f d\xi + \operatorname{div}_x \int_{\mathbb{R}} a(x, \xi) f d\xi = 0. \quad (6.106)$$

La question est alors de calculer le flux $\int_{\mathbb{R}} a(x, \xi) f d\xi$ en fonction de $\rho = \int_{\mathbb{R}} f d\xi$. Pour toute fonction $b(x, \xi)$, en utilisant (6.105), nous obtenons

$$\int_{\mathbb{R}} b(x, v) F(x) \partial_\xi f d\xi = \int_{\mathbb{R}} (\chi_\rho - f) b(x, \xi) d\xi = B(x, \rho) - \int_{\mathbb{R}} b(x, \xi) f d\xi,$$

avec $B(x, \xi) = \int_0^\xi b(x, v) dv$. Alors

$$\int_{\mathbb{R}} \left(b(x, \xi) - F(x) \partial_\xi b(x, \xi) \right) f d\xi = B(x, \rho).$$

Il ne reste plus qu'à résoudre

$$b(x, \xi) - F(x) \partial_\xi b(x, \xi) = a(x, \xi). \quad (6.107)$$

Si on impose à b de rester bornée, il vient

$$b(x, \xi) = \begin{cases} \int_\xi^{+\infty} \frac{a(x, v)}{F(x)} e^{(\xi-v)/F(x)} dv & \text{pour } F(x) > 0, \\ a(x, \xi) & \text{pour } F(x) = 0, \\ - \int_{-\infty}^\xi \frac{a(x, v)}{F(x)} e^{(\xi-v)/F(x)} dv & \text{pour } F(x) < 0. \end{cases}$$

Le changement de variables $v \rightarrow vF + \xi$ donne

$$b(x, \xi) = \int_0^{+\infty} a(x, \xi + vF(x)) e^{-v} dv. \quad (6.108)$$

En reportant dans (6.107), on trouve $B(x, \rho(t, x)) = \int_{\mathbb{R}} f(t, x, \xi) a(x, \xi) d\xi$ et finalement il vient (6.101).

L'équation (6.105) montre que f ne converge pas vers χ_ρ mais vers une Maxwellienne modifiée. Cette Maxwellienne $M_k(x, \xi)$ doit vérifier

$$F(x) \partial_\xi M_k(x, \xi) + M_k(x, \xi) = \chi_k(x, \xi), \quad (6.109)$$

avec

$$\int_{\mathbb{R}} M_k(x, \xi) d\xi = k. \quad (6.110)$$

Il vient

$$M_k(x, \xi) = \int_0^{+\infty} \chi_k(\xi - F(x)v) e^{-v} dv. \quad (6.111)$$

Cette Maxwellienne vérifie des propriétés similaires à la Maxwellienne classique χ , à savoir que pour tout $k, k' \in \mathbb{R}$,

$$\text{sgn}(M_k(x, \xi) - M_{k'}(x, \xi)) = \text{sgn}(k - k'), \quad (6.112)$$

$$\int_{\mathbb{R}} |M_k(x, \xi) - M_{k'}(x, \xi)| d\xi = |k - k'|, \quad (6.113)$$

$$\int_{\mathbb{R}} a(x, \xi) M_k(x, \xi) d\xi = \int_{\mathbb{R}} b(x, \xi) \chi_k(\xi) d\xi = B(x, k). \quad (6.114)$$

Notons que la dépendance ou non de F par rapport à x va obliger des différences de techniques de preuves. En effet, dans le cas où F est constant, la Maxwellienne modifiée $M_k(\xi)$ ne dépend pas de x et ainsi, mis à part le terme $\text{div}_x a$, M_k est presque solution de l'équation cinétique. Ceci permet d'utiliser les techniques classiques par inégalités d'entropie approchées. Dans le cas plus général où F dépend de x , la Maxwellienne $M_k(x, \xi)$ a une dépendance inhabituelle en x , les estimations BV ne seront plus vérifiées et il faudra utiliser des arguments de type compacité par compensation.

6.3 Technique BV et compacité par compensation

La preuve du premier résultat suit le schéma suivant. Le premier ingrédient de la preuve est d'obtenir les inégalités

$$\begin{aligned} & \partial_t \int_{\mathbb{R}} |f_\varepsilon - M_k| d\xi + \operatorname{div}_x \int_{\mathbb{R}} a(x, \xi) |f_\varepsilon - M_k| d\xi \\ & \leq \int_{\mathbb{R}} |\partial_t M_k + \operatorname{div}_x(a M_k)| d\xi + \frac{1}{\varepsilon} \int_{\mathbb{R}} |\chi_\rho - \chi_{\rho_k}| d\xi - \frac{1}{\varepsilon} \int_{\mathbb{R}} |f_\varepsilon - M_k| d\xi. \end{aligned}$$

avec $\rho = \int_{\mathbb{R}} f_\varepsilon d\xi$ et $\rho_k = \int_{\mathbb{R}} M_k d\xi$. Elles proviennent de régularisation de composition de dérivation [79]. Le terme $|\partial_t M_k + \operatorname{div}_x(a M_k)|$ se borne uniformément dans l'espace des mesures bornées en supposant que $k = k(t, x) \in BV_{loc}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n)$. Nous obtenons alors, pour ces fonctions k , la convergence

$$\int_{\mathbb{R}} |f_\varepsilon - M_k| d\xi - |\rho_\varepsilon - k| \rightarrow 0, \quad \text{in } L^1([0, T] \times K), \quad K \text{ compact de } \mathbb{R}^n.$$

Par approximation BV de ρ , nous obtenons : s'il existe une sous-suite $\rho_\varepsilon \rightarrow \rho$ dans $L^1([0, T] \times K)$ alors

$$|f_\varepsilon - M_\rho| \rightarrow 0, \quad \text{in } L^1([0, T] \times K \times \mathbb{R}). \quad (6.115)$$

La compacité de la suite (ρ_ε) dans $C^0([0, T]; L^1(K))$ s'obtient par des arguments de type BV, le Théorème d'Ascoli et le procédé diagonal de Cantor. Nous avons donc la convergence de f_ε vers M_ρ . Passons maintenant aux inégalités d'entropie. Il existe $\mathcal{C} \subset \mathbb{R}$ au plus dénombrable tel que si $k \in \mathbb{R} \setminus \mathcal{C}$, $\{\rho = k\}$ est négligeable. Alors pour $k \in \mathcal{C}$, le passage à la limite en ε se justifie et donne

$$\partial_t \int_{\mathbb{R}} |M_\rho - M_k| d\xi + \operatorname{div}_x \int_{\mathbb{R}} a(x, \xi) |M_\rho - M_k| d\xi + \int_{\mathbb{R}} (\operatorname{div}_x a) M_k \operatorname{sgn}(\rho - k) d\xi \leq 0.$$

Utilisant les relations (6.112)- (6.114), ceci donne

$$\begin{aligned} \forall k \in \mathbb{R} \setminus \mathcal{C}, \quad & \partial_t |\rho - k| + \operatorname{div}_x \left((B(x, \rho) - B(x, k)) \operatorname{sgn}(\rho - k) \right) \\ & + (\operatorname{div}_x B)(x, k) \operatorname{sgn}(\rho - k) \leq 0. \end{aligned} \quad (6.116)$$

Par un argument de régularisation, on montre alors que si $\rho \in C^0(\mathbb{R}^+; L^1(K))$, pour tout compact $K \subset \mathbb{R}^n$, est solution faible de (6.101) avec les inégalités d'entropie (6.116) pour p.p. $k \in \mathbb{R}$, alors ρ satisfait (6.116) pour tout $k \in \mathbb{R}$.

La solution obtenue est dans $L^1([0, +\infty[\times \mathbb{R})$ (pas nécessairement continue en temps en 0) et satisfait les inégalités d'entropie, alors la question de savoir s'il s'agit de l'unique solution au sens de Kružkov est importante. Ce problème a été résolu de façon positive dans [65] pour la dimension un et dans [194] pour le cas multi-dimensionnel avec une hypothèse de non-dégénérescence sur le flux.

En ce qui concerne la preuve du second résultat, on montre que pour tout $k \in C^1(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n)$

$$\partial_t \int_{\mathbb{R}} |f_\varepsilon - M_k| d\xi + \partial_x \int_{\mathbb{R}} a(x, \xi) |f_\varepsilon - M_k| d\xi \leq \mathcal{M}_\varepsilon^k, \quad (6.117)$$

où

$$\mathcal{M}_\varepsilon^k = - \int_{\mathbb{R}} \partial_x [a(x, \xi) M_k(x, \xi)] \operatorname{sgn}(f_\varepsilon - M_k) d\xi$$

est une suite bornée de mesures. Il est alors possible d'appliquer les arguments de compacité par compensation de [153] et [188] comme dans [175]. L'inégalité (6.117) et la loi de conservation (6.106) donne, pour une sous-suite,

$$\begin{aligned} & \langle \rho_\varepsilon \int_{\mathbb{R}} a(x, \xi) |f_\varepsilon - M_k| d\xi \rangle - \langle \int_{\mathbb{R}} a(x, \xi) f_\varepsilon d\xi \int_{\mathbb{R}} |f_\varepsilon - M_k| d\xi \rangle = \\ & \rho \langle \int_{\mathbb{R}} a(x, \xi) |f_\varepsilon - M_k| d\xi \rangle - \langle \int_{\mathbb{R}} a(x, \xi) f_\varepsilon d\xi \rangle \langle \int_{\mathbb{R}} |f_\varepsilon - M_k| d\xi \rangle \end{aligned}$$

où $\langle u_\varepsilon \rangle$ est la limite L^∞ faible * de la suite (u_ε) et avec $\rho = \langle \rho_\varepsilon \rangle$. De ceci, on obtient $\langle B(x, \rho_\varepsilon) \rangle = B(x, \rho)$ ce qui permet d'avoir que ρ est solution de (6.101). Pour obtenir la convergence forte et les inégalités d'entropie, nous montrons que la mesure de Young associé à la suite (ρ_ε) est une mesure de Dirac. Pour cela, nous généralisons la technique de [188] au cas des fonctions dépendant d'un paramètre x .

7 Lemmes de moyenne pour une équation de transport complète

Pour terminer cette partie sur les limites hydrodynamiques, après le lemme de moyenne adapté au modèle BGK (section 3.2), présentons maintenant un lemme de moyenne qui améliore la régularité connue dans le cas d'une équation de transport avec un terme de force. Commençons par un bref survol des lemmes de moyenne.

7.1 Rappel sur les lemmes de moyenne

La théorie de régularité via des lemmes de moyenne a été introduite dans [101] et s'est développée, entre autres, dans [81], [94], [82], [34], [44], [174], [45], [144], [104]. Les lemmes de moyenne sont un outil important pour obtenir la compacité d'équations cinétiques (voir par exemple [81] pour une illustration). Plus généralement, ceci a été utilisé dans un grand nombre de papiers ces dernières années. Parmi ces articles, un résultat important qui utilise un lemme de moyenne est la limite hydrodynamique des équations de Boltzmann ou BGK vers les équations d'Euler ou Navier-Stokes incompressibles ([103], [102]).

Pour faire bref, un lemme de moyenne est un résultat qui dit que les quantités macroscopiques $\int f(t, x, \xi) \psi(\xi) d\xi$ ont une meilleure régularité par rapport à (t, x) que les quantités microscopiques $f(t, x, \xi)$ où f est solution d'une équation cinétique.

Par exemple, dans [82] et [34], le résultat suivant est prouvé.

Théorème 7.1 (DiPerna, Lions, Meyer [82] – Bézard [34]) *Soit $f, g_j \in L^p(\mathbb{R}_t \times \mathbb{R}_x^n \times \mathbb{R}_\xi^m)$ avec $1 < p \leq 2$ tel que*

$$\partial_t f + \operatorname{div}_x [a(\xi) f] = \sum_{|j| \leq M} \partial_\xi^j g_j, \quad (7.118)$$

avec $a \in W^{M,\infty}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$ pour $M \in \mathbf{N}$. Soit $\psi \in W^{M,\infty}(\mathbb{R}^m)$ avec un support compact. Soit $A > 0$ tel que le support de ψ est inclus dans $[-A, A]^m$. Supposons l'hypothèse de non-dégénérescence suivante sur a : il existe $0 < \alpha \leq 1$ et $C > 0$ tels que pour tout $(u, \sigma) \in S^n$ et $\varepsilon > 0$,

$$\text{mes} (\{\xi \in [-A, A]^m ; u - \varepsilon < a(\xi) \cdot \sigma < u + \varepsilon\}) \leq C\varepsilon^\alpha.$$

Alors $\rho_\psi(t, x) = \int_{\mathbb{R}^m} f(t, x, \xi)\psi(\xi) d\xi$ appartient à $W^{s,p}(\mathbb{R}_t \times \mathbb{R}_x^n)$ où $s = \frac{\alpha}{(M+1)p'}$, p' étant l'exposant conjugué de p .

La régularité de f elle-même est aussi un sujet d'étude, par exemple en supposant de la régularité en ξ , voir [41], [121].

7.2 Résultats avec terme de force

Pour l'équation (7.118), la régularité obtenue est optimale, voir [141], [142] et [95].

Le théorème énoncé à la section précédente dit, dans le cas $M = 1$, que pour l'équation

$$\partial_t f + a(\xi) \cdot \nabla_x f = g - F(t, x, \xi) \cdot \nabla_\xi \tilde{g}, \quad (7.119)$$

la régularité obtenue est $W^{s,p}(\mathbb{R}_t \times \mathbb{R}_x^n)$ avec $s = \frac{\alpha}{2p'}$. Si on considère l'équation

$$\partial_t f + a(\xi) \cdot \nabla_x f + F(t, x, \xi) \cdot \nabla_\xi f = g, \quad (7.120)$$

c'est-à-dire avec $\tilde{g} = f$, il est classique de considérer le terme $F(t, x, \xi) \cdot \nabla_\xi f$ comme un morceau du second membre et la régularité obtenue est $W^{s,p}(\mathbb{R}_t \times \mathbb{R}_x^n)$ avec $s = \frac{\alpha}{2p'}$. Mais pour (7.120), la dérivation par rapport à ξ porte seulement sur f via l'équation de transport et non sur un terme arbitraire \tilde{g} . Il n'y a donc pas de raison de perdre de l'information car ce terme est une partie des caractéristiques et les termes du second membre sont dans L^2 (second membre avec $M = 0$ et non $M = 1$) et la bonne régularité devrait donc être $W^{s,p}(\mathbb{R}_t \times \mathbb{R}_x^n)$ avec $s = \frac{\alpha}{p'}$. Ceci explique la motivation des travaux présentés ensuite. Les résultats obtenus généralisent ceux obtenus dans [96] et [99] pour le cas transversal.

Théorème 7.2 ([27]) Soit $a \in C^{N+3}(\mathbb{R}_\xi^m, \mathbb{R}_x^n)$, $F \in C^{N+3}(\mathbb{R}_t \times \mathbb{R}_x^n \times \mathbb{R}_\xi^m, \mathbb{R}_\xi^m)$, $f, g \in L^2(\mathbb{R}_t \times \mathbb{R}_x^n \times \mathbb{R}_\xi^m)$, vérifiant (7.120). Soit $A > 0$ et $\psi \in C_c^{N+2}(\mathbb{R}_\xi^m)$ tels que le support de ψ est inclu dans $[-A, A]^m$. Supposons qu'il existe $0 < \alpha \leq 1$ et $C > 0$ tels que pour tout $(u, \sigma) \in S^n$ et $\varepsilon > 0$,

$$\text{mes} (\{\xi \in [-A, A]^m ; u - \varepsilon < a(\xi) \cdot \sigma < u + \varepsilon\}) \leq C\varepsilon^\alpha. \quad (7.121)$$

Alors la moyenne

$$\rho_\psi(t, x) = \int_{\mathbb{R}^m} f(t, x, \xi)\psi(\xi) d\xi$$

est dans $H_{loc}^{\alpha/2}(\mathbb{R}_t \times \mathbb{R}_x^n)$.

Notons que nous obtenons bien $\alpha/2$ au lieu de $\alpha/4$.

La preuve de ce résultat consiste en deux étapes : généraliser un lemme de moyenne “classique” aux fonctions tests qui dépendent de (t, x) , puis faire des changements de coordonnées locales pour se ramener localement à un opérateur sans dérivée en ξ .

Quand le terme F est constant, nous obtenons une régularité globale pour des fonctions tests moins régulières.

Théorème 7.3 ([27]) *Soit $a \in C^\gamma(\mathbb{R}_\xi^m, \mathbb{R}_x^n)$, $F(t, x, \xi) = F \in \mathbb{R}^m$, $F \neq 0$, $f, g \in L^2(\mathbb{R}_t \times \mathbb{R}_x^n \times \mathbb{R}_\xi^m)$ vérifiant (7.120) où nous supposons que la fonction a satisfait la condition suivante, où γ est un entier positif,*

$$\forall(\xi, \sigma) \in \mathbb{R}^m \times S^n, \quad \sigma = (\sigma_0, \sigma_1, \dots, \sigma_n), \quad \tilde{\sigma} = (\sigma_1, \dots, \sigma_n),$$

$$|\sigma_0 + a(\xi) \cdot \tilde{\sigma}| + \sum_{k=1}^{\gamma-1} |(F \cdot \nabla_\xi)^k a(\xi) \cdot \tilde{\sigma}| > 0. \quad (\gamma ND)$$

Soit $\psi \in C_c^1(\mathbb{R}_\xi^m)$, alors la moyenne

$$\rho_\psi(t, x) = \int_{\mathbb{R}^m} f(t, x, \xi) \psi(\xi) d\xi$$

est dans $H^{1/\gamma}(\mathbb{R}_t \times \mathbb{R}_x^n)$.

Pour prouver ce résultat, utilisant la transformée de Fourier dans la direction ξ_1 telle que $F \cdot \nabla_\xi = |F| \partial_{v_1}$, nous sommes ramené à estimer des intégrales oscillantes. Pour cela, nous utilisons un résultat de phase stationnaire de [187] qui donne précisément une majoration d’intégrales oscillantes par le terme dominant dans la méthode de phase stationnaire.

Le résultat suivant compare la régularité obtenue dans les deux énoncés suivant l’hypothèse sur a .

Théorème 7.4 ([27]) *Pour $n \geq 2$ et $m = 1$, le Théorème 7.3 donne une meilleure régularité que le Théorème 7.2, le meilleur exposant $\gamma = \gamma_{opt}$ comparé au meilleur $\alpha = \alpha_{opt}$ vérifie $\frac{1}{\gamma_{opt}} = \frac{1}{n+1} > \frac{\alpha_{opt}}{2} = \frac{1}{2n}$. D’un autre côté, pour $n = m$, le Théorème 7.2 donne une demi-dérivée avec l’exposant $\alpha = 1$.*

Utilisant les espaces de Hardy et les résultats de Bézard [34], nous en déduisons des lemmes de moyenne dans L^p par interpolation, voir [27] pour les énoncés obtenus.

Deuxième partie

Modélisations mathématiques

Dans cette seconde partie, nous nous intéressons à la modélisation de phénomènes physiques à l'aide de systèmes de lois de conservations auquel nous rajoutons des contraintes afin de rendre la physique du problème et à l'aide d'équations cinétiques. Commençons par faire des rappels sur les résultats obtenus dans la thèse sous cet aspect puis voyons comment appliquer ces idées au trafic routier.

8 Rappel succinct de la thèse sur les modèles avec contraintes

Dans diverses modélisations (modèles diphasiques, équations de Saint-Venant, pipeline, ...), il est nécessaire d'imposer des contraintes sur certaines quantités du modèle, par exemple le fait que l'une des quantités reste bornée. Dans le cadre de la dynamique des gaz, la quantité représentant la densité (ou la fraction volumique) doit, dans certaines circonstances, être bornée. Pour la dynamique des gaz sans pression, des masses de Dirac peuvent apparaître même pour des données initiales régulières ([39], [52] et [46]). Donc une contrainte de type $\rho \leq 1$ devient impossible à prendre en compte telle quelle. Voir aussi [84] et [110] pour le système sans contrainte. Nous proposons et étudions deux formulations dans [17] et [24].

8.1 Modèle avec contrainte sur la densité

Dans la première formulation plutôt axée sur un modèle de pipeline ou selon l'évolution d'une des deux quantités d'un modèle diphasique, le modèle s'écrit

$$\begin{cases} \partial_t \rho + \partial_x(\rho u) = 0, \\ \partial_t(\rho u) + \partial_x(\rho u^2 + \pi) = 0, \end{cases} \quad (8.122)$$

avec les contraintes

$$0 \leq \rho \leq 1, \quad \pi \geq 0, \quad (8.123)$$

et la relation d'exclusion

$$(1 - \rho)\pi = 0. \quad (8.124)$$

Cette relation demande que dans les régions où $\rho < 1$, le terme de type pression π soit nul. Pour plus de détails sur ce modèle, voir [43].

Notre étude repose sur l'existence de solutions particulières appelées bouchons collants de la forme

$$\rho(t, x) = \sum_{i=1}^n \mathbb{1}_{a_i(t) < x < b_i(t)}, \quad \rho(t, x)u(t, x) = \sum_{i=1}^n u_i(t) \mathbb{1}_{a_i(t) < x < b_i(t)}, \quad (8.125)$$

et qui sont une extension de la notion de particules collantes utilisées pour la dynamique des gaz sans pression [52]. Il est à remarquer que les solutions bouchons collants qui ne prennent comme valeurs que 0 et 1 suffisent à obtenir toutes les données initiales dans L^1 telle que $0 \leq \rho \leq 1$. On montre, en effet, en particulier, que toute fonction de L^1 à valeurs entre 0 et 1 p.p. est limite au sens des distributions de fonctions du type $\sum_{i=1}^n \mathbb{1}_{a_i(t) < x < b_i(t)}$.

On prouve également un résultat de stabilité sur les solutions faibles, ce qui permet de plus d'obtenir l'existence de solutions pour toute données initiales $\rho^0 \in L^1$ et $u \in L^\infty$. Ce

résultat est technique et utilise des espaces du type $L^\infty(\mathbb{R}_x, \mathcal{M}([0, T]))$ et $BV_t(\mathcal{D}'_x)$ afin d'obtenir l'existence du produit $\rho\pi$ et sa stabilité faible. En effet, la contrainte $\rho\pi = \pi$ soulève le problème du produit d'une fonction de $C_t([0, \infty[; L^\infty_{w^*}(\mathbb{R}))$ par une mesure. On fournit pour cela une réécriture de $\rho\pi$ qui soit compatible avec la régularité des solutions. Cette réécriture est basée sur la décomposition de la compacité par compensation

$$\rho\pi = (\rho)(\rho u^2 + \pi) - (\rho u)(\rho u).$$

Privilégiant la variable ρ , on définit M par $\partial_x M = \rho$, $\partial_t M = -\rho u$, et alors le produit s'écrit

$$\rho\pi = \partial_t(\rho u M) + \partial_x((\rho u^2 + \pi)M).$$

Privilégiant la variable ρu , on définit Q par $\partial_x Q = \rho u$, $\partial_t Q = -(\rho u^2 + \pi)$, et cette fois, on a

$$\rho\pi = -\partial_t(\rho Q) - \partial_x(\rho u Q).$$

La contrainte $\rho\pi = \pi$ peut alors se réécrire

$$\partial_t(\rho u M) + \partial_x((\rho u^2 + \pi)M) = -\partial_t(\rho Q) - \partial_x(\rho u Q) = \pi. \quad (8.126)$$

Nous obtenons finalement le résultat suivant.

Théorème 8.1 ([17]) *Si $\rho^0 \in L^1(\mathbb{R})$ et $u^0 \in L^\infty(\mathbb{R})$, $0 \leq \rho^0 \leq 1$, alors il existe (ρ, u, π) avec les régularités $\rho \in L_t^\infty(0, \infty; L_x^\infty(\mathbb{R}) \cap L_x^1(\mathbb{R})) \cap C_t([0, \infty[; L_{w^*}^\infty(\mathbb{R}))$, $u \in L_t^\infty(0, \infty; L_x^\infty(\mathbb{R}))$, $\pi \in \mathcal{M}_{loc}([0, \infty[\times \mathbb{R}) \cap L^\infty(\mathbb{R}_x, \mathcal{M}([0, T]))$ solution de (8.122) avec les contraintes (8.123) et (8.126). De plus, la solution vérifie*

$$\partial_x u(t, x) \leq \frac{1}{t}, \quad (8.127)$$

$$\text{essinf } u^0(x) \leq u(t, x) \leq \text{esssup } u^0(x), \quad (8.128)$$

$$TV_{[a, b]}(u(t, \cdot)) \leq \frac{2(b-a)}{t} + 2\|u^0\|_{L^\infty} \quad \forall a < b, \quad (8.129)$$

$$\partial_t(\rho S(u)) + \partial_x(\rho u S(u) + \pi_S) \leq 0 \text{ dans }]0, \infty[\times \mathbb{R} \quad (8.130)$$

pour tout $S \in C^1(\mathbb{R})$ convexe et Lipschitzienne, où $\pi_S \in L^\infty(\mathbb{R}_x, \mathcal{M}([0, T]))$ et $|\pi_S| \leq \text{Lip}(S)\pi$.

8.2 Modèle de contrainte avec perte de masse

Le second modèle [24] est basé, lui, sur l'idée que la contrainte correspond au fait de retirer la masse qui dépasse du niveau un, tout comme l'eau déborde d'une rivière ou d'un récipient. Il s'écrit

$$\begin{cases} \partial_t \rho + \partial_x(\rho u) = Q, \\ \partial_t(\rho u) + \partial_x(\rho u^2 + p(\rho)) = Qu, \end{cases} \quad (8.131)$$

avec les contraintes

$$0 \leq \rho \leq 1, \quad Q \leq 0, \quad (8.132)$$

et la relation d'exclusion

$$(1 - \rho)Q = 0. \quad (8.133)$$

Le terme Q représente la perte de masse.

Pour ce modèle, deux produits posent cette fois problème : il s'agit des produits Qu et $Q\rho$, car Q peut contenir des masses de Dirac et u et ρ peuvent être discontinues. On fournit donc une formulation faible, que nous appelons produit faible entropique. Elle consiste à introduire une inconnue supplémentaire $v \in L^\infty(Q)$ et à considérer le système suivant

$$\begin{cases} \partial_t \rho + \partial_x(\rho u) = Q, \\ \partial_t(\rho u) + \partial_x(\rho u^2 + p(\rho)) = Qv, \end{cases} \quad (8.134)$$

avec

$$0 \leq \rho \leq 1, \quad Q \leq 0. \quad (8.135)$$

On prend $v \in L^\infty(Q)$, de façon à ce que le produit Qv soit bien défini. On doit donner un sens faible à $Qv = Qu$ et $Q\rho = Q$. Pour cela, on demande que la famille d'inégalités suivantes soient satisfaites

$$\partial_t \eta_S(\rho, u) + \partial_x G_S(\rho, u) \leq Q \eta'_S(1, v) \cdot (1, v), \quad (8.136)$$

pour toute entropie convexe η_S d'une famille paramétrée par des fonctions convexes S , où G_S est le flux d'entropie associé, et la dérivation dans η'_S étant prise par rapport à $(\rho, \rho u)$. On vérifie que (8.134)-(8.136) est bien une formulation faible de (8.131)-(8.133). Pour $p(\rho) = \kappa \rho^\gamma$ avec $\gamma > 1$ et pour des solutions régulières, on montre qu'une seule inégalité (8.136) avec $S(v) = v^2/2$ est suffisante pour garantir $Qu = Qv$ et $Q\rho = Q$. Pour le modèle avec $p(\rho) = 0$, nous proposons une dynamique pour les bouchons collants associée à ce problème ce qui permet d'obtenir stabilité et existence des solutions. Pour le modèle avec $p(\rho) = \kappa \rho^\gamma$ pour $1 < \gamma \leq 3$, les solutions s'obtiennent à partir du modèle BGK étudié à la section 2.1 et sur lequel nous rajoutons la contrainte au niveau cinétique. Le résultat est le suivant.

Théorème 8.2 ([24]) *Soit $\rho^0 \in L^1(\mathbb{R})$ tel que $0 \leq \rho^0 \leq 1$ et $u^0 \in L^\infty(\mathbb{R})$. Alors il existe des solutions (ρ, u, Q, v) avec les régularités $\rho \in L_t^\infty(0, \infty; L_x^\infty(\mathbb{R}) \cap L_x^1(\mathbb{R}))$, $u \in L_t^\infty(0, \infty; L_x^\infty(\mathbb{R}))$, $Q \in \mathcal{M}([0, \infty[\times \mathbb{R})$, $v \in L^\infty(Q)$, satisfaisant (8.134) avec les contraintes (8.135) et (8.136).*

Pour d'autres problèmes hyperboliques avec contraintes, on se reportera à [13], [92], [137] et [138]. Pour une approche plus générale de ces problèmes, on consultera [72]. Voir aussi la section 11.1 pour des extensions de ces modèles et une étude numérique. Passons maintenant aux travaux effectués depuis la thèse dans ce domaine, à savoir l'application de ces techniques à la modélisation du trafic routier.

9 Modélisation en trafic routier

9.1 Bref historique de quelques modélisations en trafic routier

Durant les cinquante dernières années, une grande variété de modèles de trafic routier ont été proposés. Il est possible de les classer suivant trois approches. Tout d'abord, les modèles microscopiques où on suit l'évolution de chaque véhicule en fonction de celui qui le précède (voir [93], [8]), ensuite les modèles cinétiques qui étudient la distribution des vitesses des véhicules (voir [179], [165], [158], [129], [154], [180], [130]) et finalement les modèles fluides qui s'intéressent à l'évolution de densité, vitesse, ..., des véhicules. Nous

nous intéresserons à la dernière approche. Le premier modèle de ce type est du à Lighthill et Whitham [139] et Richards [181]. Il s'agit d'une unique équation, celle de l'évolution de la densité

$$\partial_t \rho + \partial_x(\rho V(\rho)) = 0,$$

où V est décroissante et s'annule pour une valeur de saturation. De nombreuses modifications et extensions ont ensuite été proposées, en particulier des modèles du second ordre où une seconde équation qui décrit l'évolution de la vitesse est considérée. Il s'agit souvent de modèles proches de la dynamique des gaz isentropiques ([166], [167], [129] et [116]), à savoir d'une forme proche de

$$\begin{cases} \partial_t \rho + \partial_x(\rho u) = 0, \\ \partial_t(\rho u) + \partial_x(\rho u^2 + p(\rho)) = \alpha(V(\rho) - u)\rho. \end{cases} \quad (9.137)$$

Mais, les modèles trop proches de la dynamique des fluides présentent des propriétés absurdes pour une simulation de trafic routier, comme Daganzo l'a montré dans [69]. Ainsi pour $\alpha = 0$ dans le modèle ci-dessus, les problèmes de Riemann peuvent faire apparaître des états intermédiaires avec des vitesses négatives et les vitesses caractéristiques étant $u \pm \sqrt{p'(\rho)}$, une partie de l'information va plus vite que la vitesse des voitures. Aussi Aw, Rascle [7] et Zhang [198] ont proposés de nouveaux modèles pour éviter ce problème. Ces modèles dérivent en fait de modèles microscopiques de type Follow-the-Leader comme prouvé dans [6]. Voir aussi les travaux de [109], [66] sur ce genre de problèmes.

9.2 Modèles avec contrainte en trafic routier

Partons du modèle de Aw et Rascle qui évite les problèmes soulevés par Daganzo et qui s'écrit

$$\begin{cases} \partial_t \rho + \partial_x(\rho u) = 0, \\ \partial_t(\rho w) + \partial_x(\rho w u) = 0, \end{cases} \quad (9.138)$$

où $w = u + p(\rho)$. Les valeurs propres de ce système de lois de conservation sont $\lambda_1 = u - \rho p'(\rho) \leq \lambda_2 = u$. Pour $\rho \neq 0$, $\lambda_1 \neq \lambda_2$ et le système est strictement hyperbolique. La première valeur propre λ_1 est vraiment non-linéaire avec des ondes de chocs (freinages) et des ondes de raréfactions (accélération). La seconde valeur propre λ_2 est linéairement dégénérée avec des discontinuités de contact (saut dans les densités de voitures à la vitesse du trafic). Ce système vérifie un principe du maximum sur u et w mais pas sur la densité ρ ce qui pose problème et il est nécessaire de modifier le modèle afin qu'il s'approche davantage de la réalité.

Nous proposons tout d'abord un modèle Aw-Rascle modifié en changeant le terme p , sorte de terme de pression représentant la différence entre la vitesse souhaitée et la vitesse actuelle, selon

$$p(\rho) = \left(\frac{1}{\rho} - \frac{1}{\rho^*(u)} \right)^{-\gamma} \quad \text{avec} \quad \rho \leq \rho^*(u). \quad (9.139)$$

Ce terme tend vers l'infini quand $\rho \rightarrow \rho^*(u)$ qui représentera la densité maximale.

Deux approches sont possibles, considérer que $\rho^*(u) = \rho^*$ est constante ou que $\rho^*(u)$ dépend vraiment de la vitesse (puisque la distance que va laisser un conducteur avec la voiture qui le précède va dépendre de la vitesse à laquelle est le trafic). Le premier modèle présente l'avantage d'être plus simple à mettre en oeuvre, le second est plus proche de la réalité.

Des hypothèses sont nécessaires dans le second cas sur la fonction ρ^* , à savoir

- (A-1) $\rho^*(u)$ est de classe C^2 ,
- (A-2) $\rho^*(u)$ est strictement décroissante,
- (A-3) $\rho^*(u)$ est concave.

Le rôle du terme p ne doit vraiment intervenir que dans les cas où le trafic est congestionné, c'est-à-dire pour ρ proche de $\rho^*(u)$. Pour cela, procédons à la renormalisation qui consiste à changer p en εp . Ceci s'écrit

$$\begin{cases} \partial_t \rho^\varepsilon + \partial_x(\rho^\varepsilon u^\varepsilon) = 0, \\ \partial_t(\rho^\varepsilon u^\varepsilon + \varepsilon \rho^\varepsilon p(\rho^\varepsilon)) + \partial_x(\rho^\varepsilon (u^\varepsilon)^2 + \varepsilon \rho^\varepsilon u^\varepsilon p(\rho^\varepsilon)) = 0 \end{cases} \quad (9.140)$$

La limite formelle quand $\varepsilon \rightarrow 0$ de ce modèle conduit aux modèles de dynamique des gaz sans pression avec contraintes suivant

$$\begin{cases} \partial_t \rho + \partial_x(\rho u) = 0, \\ \partial_t(\rho u + \rho \bar{p}) + \partial_x(\rho u^2 + \rho u \bar{p}) = 0, \\ 0 \leq \rho \leq \rho^*(u), \quad \bar{p} \geq 0, \quad (\rho^*(u) - \rho) \bar{p} = 0. \end{cases} \quad (9.141)$$

Une différence importe pour le modèle entre le cas $\rho^*(u) = \rho^*$ constante et celui de $\rho^*(u)$ variable porte sur les vitesses de propagation. Dans le premier cas, les vitesses caractéristiques sont

$$\lambda_1^\varepsilon = u^\varepsilon - \varepsilon \rho^\varepsilon p'(\rho^\varepsilon), \quad \lambda_2^\varepsilon = u^\varepsilon. \quad (9.142)$$

et il vient λ_1^ε tend vers $-\infty$ quand $\varepsilon \rightarrow 0$ dans une zone où $\rho = \rho^*$. L'information se propage donc instantanément vers l'arrière d'une zone de bouchon. Dans le second cas, il vient

$$\lambda_1^\varepsilon = u^\varepsilon - \frac{\varepsilon \rho^\varepsilon \partial_\rho p}{1 + \varepsilon \partial_u p} \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} u + \frac{\rho^*(u)}{(\rho^*)'(u)}, \quad (9.143)$$

et l'information se propage vers l'arrière à vitesse finie.

Dans [25], nous étudions, pour le cas $\rho^*(u) = \rho^*$, les problèmes de Riemann, la dynamique des zones de bouchon, un théorème d'existence et proposons des simulations numériques. Dans [26], nous étudions, pour le cas $\rho^*(u)$, le lien entre les différents modèles, les problèmes de Riemann et un théorème d'existence.

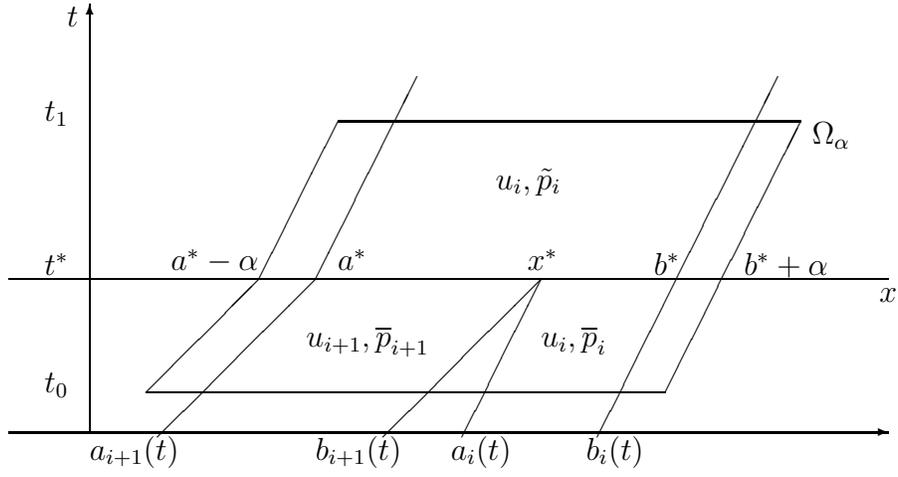
9.3 Solutions particulières et théorèmes d'existence

Détaillons la technique de preuve des résultats d'existence à travers l'étude des zones de bouchon pour chacun des modèles.

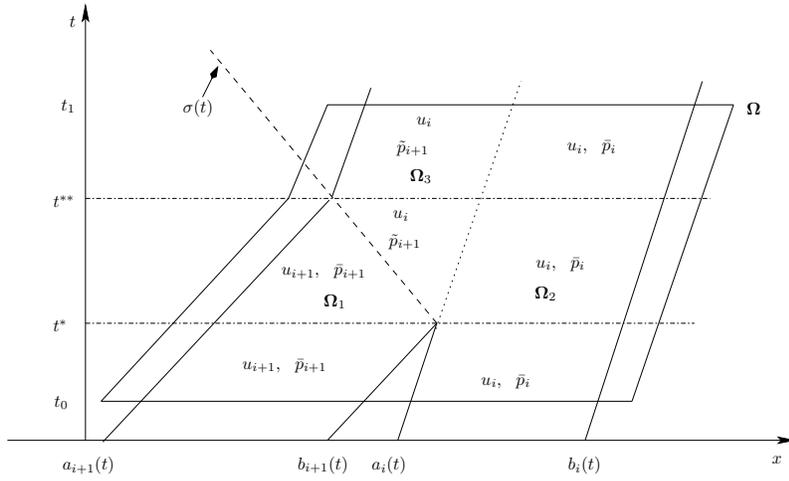
On considère les bouchons collants sous la forme

$$\begin{aligned} \rho(t, x) &= \sum_{i=1}^N \rho_i^*(t) \mathbb{1}_{a_i(t) < x < b_i(t)}, \\ \rho(t, x) u(t, x) &= \sum_{i=1}^N \rho_i^*(t) u_i(t) \mathbb{1}_{a_i(t) < x < b_i(t)}, \\ \rho(t, x) \bar{p}(t, x) &= \sum_{i=1}^N \rho_i^*(t) \bar{p}_i(t) \mathbb{1}_{a_i(t) < x < b_i(t)}, \end{aligned}$$

avec $\rho_i^*(t) = \rho^*$ ou $\rho_i^*(t) = \rho^*(u_i(t))$ (selon le modèle étudié) tant que $a_N(t) < b_N(t) < a_{N-1}(t) < b_{N-1}(t) < \dots < b_1(t)$. Si un bloc rattrape celui qui le précède, la dynamique est la suivante. Dans le cas où $\rho^*(u) = \rho^*$, la dynamique est



et dans le cas où $\rho^*(u)$ est non constant, la dynamique est



avec

$$\sigma'(t) = \frac{\rho_i^* u_i - \rho_{i+1}^* u_{i+1}}{\rho_i^* - \rho_{i+1}^*}.$$

Ceci définit des solutions qui vérifient de plus un principe du maximum

$$\operatorname{ess\,inf}_y u^0(y) \leq u(x, t) \leq \operatorname{ess\,sup}_y u^0(y), \quad (9.144)$$

un contrôle des variations totale de u et p selon

$$TV_K(\bar{u}(\cdot, t)) \leq TV_{\tilde{K}}(u^0), \quad TV_K(\bar{p}(\cdot, t)) \leq 2TV_{\tilde{K}}(u^0) + TV_{\tilde{K}}(p^0), \quad (9.145)$$

pour tout compact $K = [a, b]$, avec $\tilde{K} = [a - t \operatorname{ess\,sup}|u^0|, b + t \operatorname{ess\,sup}|u^0|]$, la borne

$$0 \leq \bar{p}(x, t) \leq \operatorname{ess\,sup}_y u^0(y) + \operatorname{ess\,sup}_y p^0(y). \quad (9.146)$$

et, dans le cas ρ^* constante, les entropies

$$\partial_t(\rho S(u) + \rho \bar{p}^S) + \partial_x(\rho u S(u) + \rho u \bar{p}^S) = 0, \quad (9.147)$$

avec $\rho\bar{p}^S(x, t) = H(t - t^*) \rho^* (S(u_l) - S(u_r)) \mathbb{1}_{[a^*, x^*]}(x - u_r(t - t^*))$.

Dans le premier cas, nous utilisons le lemme d'approximation des données initiales par des bouchons collants démontré dans la thèse et dans le second cas, nous améliorons le résultat en question sous la forme suivante

Lemme 9.1 ([26]) *Soit $\rho^0 \in L^1(\mathbb{R})$, $u^0 \in L^\infty(\mathbb{R}) \cap BV(\mathbb{R})$ telles que $0 \leq \rho^0 \leq \rho^*(u^0)$, alors il existe une suite de données initiales sous la forme de bouchons collants $(\rho_k^0, u_k^0, 0)_{k \geq 0}$ telle que $\int_{\mathbb{R}} \rho_k^0(x) dx \leq \int_{\mathbb{R}} \rho^0(x) dx$, $\text{essinf } u^0 \leq u_k^0 \leq \text{esssup } u^0$ et $TV(u_k^0) \leq TV(u^0)$ pour lesquels les convergences $\rho_k^0 \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} \rho^0$ et $\rho_k^0 u_k^0 \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} \rho^0 u^0$ ont lieu au sens des distributions.*

L'idée de la preuve est : 1) approximer toute donnée initiale par des données initiales de type bouchons collants, 2) ces données initiales possèdent des solutions, 3) montrer un résultat de stabilité des solutions afin de conclure à l'existence pour toute donnée initiale. Pour le premier modèle, on dispose de la stabilité suivante.

Proposition 9.2 ([25]) *Supposons que $\rho^*(u) = \rho^*$. Soit une suite de solutions (ρ_k, u_k, \bar{p}_k) avec les régularités $\rho_k \in L_t^\infty(0, \infty; L_x^\infty(\mathbb{R}) \cap L_x^1(\mathbb{R}))$, $u_k, \bar{p}_k \in L_t^\infty(0, \infty; L_x^\infty(\mathbb{R}))$ satisfaisant (9.141). Les données initiales ρ_k^0, u_k^0 sont supposées vérifier*

$$0 \leq \rho_k^0 \leq \rho^*, \quad (\rho_k^0)_{k \geq 0} \text{ est bornée dans } L^1(\mathbb{R}), \quad (9.148)$$

$$(u_k^0)_{k \geq 0} \text{ est bornée dans } L^\infty(\mathbb{R}) \cap BV(\mathbb{R}). \quad (9.149)$$

Nous supposons également (9.144)-(9.146). Alors, pour une sous-suite, $(\rho_k, u_k, \bar{p}_k) \rightarrow (\rho, u, \bar{p})$ au sens

$$\rho_k \rightarrow \rho, \quad u_k \rightarrow u, \quad \bar{p}_k \rightarrow \bar{p} \quad \text{dans } L_{w^*}^\infty(]0, \infty[\times \mathbb{R}), \quad (9.150)$$

où (ρ, u, \bar{p}) , avec les régularités $\rho \in L_t^\infty(0, \infty; L_x^\infty(\mathbb{R}) \cap L_x^1(\mathbb{R}))$, $u, \bar{p} \in L_t^\infty(0, \infty; L_x^\infty(\mathbb{R}))$, est solution de (9.141) de données initiales $(\rho^0, u^0, 0)$ telles que

$$\rho_k^0 \rightarrow \rho^0 \text{ dans } L_{w^*}^\infty(\mathbb{R}), \quad \text{et} \quad \rho_k^0 u_k^0 \rightarrow \rho^0 u^0 \text{ dans } L_{w^*}^\infty(\mathbb{R}). \quad (9.151)$$

La solution obtenue vérifie aussi (8.127), (9.144) et (9.146).

Un résultat similaire est vrai dans le cas $\rho^*(u)$. Finalement, ceci permet de montrer, pour le cas ρ^* constant

Théorème 9.3 ([25]) *Supposons que $\rho^*(u) = \rho^*$. Soit $\rho^0 \in L^1(\mathbb{R})$ avec $0 \leq \rho^0 \leq \rho^*$ et $u^0 \in L^\infty(\mathbb{R}) \cap BV(\mathbb{R})$. Alors il existe (ρ, u, \bar{p}) de régularités $\rho \in L_t^\infty(0, \infty; L_x^\infty(\mathbb{R}) \cap L_x^1(\mathbb{R}))$, $u, \bar{p} \in L_t^\infty(0, \infty; L_x^\infty(\mathbb{R}))$ satisfaisant (9.141) avec donnée initiale $(\rho^0, u^0, 0)$. De plus la solution vérifie*

$$\partial_x u(x, t) \leq \frac{1}{t}, \quad (9.152)$$

$$\text{essinf}_y u^0(y) \leq u(x, t) \leq \text{esssup}_y u^0(y), \quad (9.153)$$

$$0 \leq \bar{p}(x, t) \leq \text{esssup}_y u^0(y), \quad (9.154)$$

$$\partial_t(\rho S(u) + \rho \bar{p}^S) + \partial_x(\rho u S(u) + \rho u \bar{p}^S) = 0 \text{ dans }]0, \infty[\times \mathbb{R}, \quad (9.155)$$

pour tout $S \in C^1(\mathbb{R})$, où $\bar{p}^S \in L^\infty(]0, \infty[\times \mathbb{R})$ est tel que

$$|\bar{p}^S| \leq \|S'\|_{L^\infty(\tilde{K})} |\bar{p}|, \quad (9.156)$$

avec $\tilde{K} = [\text{essinf}_y u^0, \text{esssup}_y u^0]$.

Et dans le cas $\rho^* = \rho^*(u)$,

Théorème 9.4 ([26]) *Supposons que $\rho^*(u)$ satisfait (A-1)-(A-3). Soit $(\rho^0, u^0, 0)$ des données initiales telles que $\rho^0 \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^\infty(\mathbb{R})$, $u^0 \in L^\infty(\mathbb{R}) \cap BV(\mathbb{R})$, avec $0 \leq \rho^0 \leq \rho^*(u^0)$. Alors il existe (ρ, u, \bar{p}) de régularités $\rho \in L_t^\infty(]0, \infty[, L_x^\infty(\mathbb{R}) \cap L_x^1(\mathbb{R}))$, $u, \bar{p} \in L_t^\infty(]0, \infty[, L_x^\infty(\mathbb{R}))$ solution du système (9.141) avec les données initiales $(\rho^0, u^0, 0)$. De plus, la solution vérifie*

$$\operatorname{ess\,inf}_y u^0(y) \leq u(x, t) \leq \operatorname{ess\,sup}_y u^0(y), \quad 0 \leq \bar{p}(x, t) \leq \operatorname{ess\,sup}_y u^0(y).$$

10 Modélisation cinétique non-collisionnelle

Dans cette section, nous étudions brièvement une approche de l'équation de Vlasov par une représentation water-bag de la fonction de distribution $f(t, \mathbf{r}, \mathbf{v})$. Introduit initialement par DePackh [71], Hohl, Feix et Bertrand [88, 31, 32], le modèle water-bag permet d'établir un lien entre les descriptions fluides et cinétiques pour un plasma sans collision. L'intérêt est de garder un aspect cinétique au problème tout en ayant la même complexité qu'un modèle fluide. Ceci présente ainsi des avantages pour les applications numériques. Ces modèles ont été redéfinis pour écrire une formulation cinétique des lois de conservation scalaires. Les modèles water-bag consistent à considérer les distributions particulières suivantes

$$f(t, z, \xi) = \sum_{j=1}^N \mathcal{A}_j \cdot \mathbb{I}_{\xi_j^-(t,z) \leq \xi \leq \xi_j^+(t,z)}. \quad (10.157)$$

Cette fonction est solution de l'équation de Vlasov si et seulement si

$$\partial_t \xi_j^\pm + \xi_j^\pm \partial_z \xi_j^\pm + \partial_z \phi = 0, \quad j = 1 \dots N \quad (10.158)$$

où ϕ est le potentiel électrique $E = -\partial_z \phi$. Introduisons n_j la densité du j -ème bag, u_j sa vitesse et p_j sa pression selon

$$n_j = \mathcal{A}_j(\xi_j^+ - \xi_j^-), \quad u_j = (\xi_j^+ + \xi_j^-)/2, \quad p_j n_j^{-3} = 1/(12\mathcal{A}_j^2).$$

Il vient alors les équations des gaz isentropiques pour $\gamma = 3$,

$$\begin{cases} \partial_t n_j + \partial_z(n_j u_j) = 0, \\ \partial_t(n_j u_j) + \partial_z(n_j u_j^2 + p_j) + \partial_z \phi = 0. \end{cases} \quad (10.159)$$

avec le couplage de l'équation de Poisson

$$-\partial_z^2 \phi = \sum_{j=1}^N \mathcal{A}_j(\xi_j^+ - \xi_j^-) - 1 \quad (10.160)$$

ou avec le couplage quasi-neutre de la forme

$$\phi = \sum_{j=1}^N \mathcal{A}_j(\xi_j^+ - \xi_j^-) - 1. \quad (10.161)$$

Des résultats d'existence locale pour (10.158) couplée avec (10.160) ou (10.161) sont présentés dans [33].

En fait une fonction de distribution du type (10.157) peut résoudre des équations cinétiques plus générales. Prenons

$$f(t, z, \xi) = \sum_{i=0}^{N-1} c_i \mathbb{1}_{\xi_i(t,z) < \xi < \xi_{i+1}(t,z)}(\xi). \quad (10.162)$$

Alors (10.162) est solution de

$$\partial_t f + \xi \partial_z f - \partial_z q(\rho) \partial_\xi f = 0, \quad (10.163)$$

où

$$\rho(t, z) = \int_{\mathbb{R}} f(t, z, \xi) d\xi, \quad (10.164)$$

si et seulement si

$$\partial_t \xi_i + \partial_z \left(\frac{\xi_i^2}{2} + q(\rho) \right) = 0, \quad \text{pour } i = 0, \dots, N. \quad (10.165)$$

En particulier, on retrouve le cas quasi-neutre avec $q(\rho) = \rho$. L'existence locale de solutions fortes pour (10.165) est reliée à son hyperbolicité. Supposons qu'à (t, z) fixé, l'application $\xi \rightarrow f(t, z, \xi)$ change une fois de monotonie (c'est-à-dire qu'il existe n_0 tel que $c_{i+1} > c_i$ pour $i = 0, \dots, n_0 - 1$ et $c_{i+1} < c_i$ pour $i = n_0, \dots, N - 2$), alors le système est hyperbolique. Donnons finalement une estimation du temps d'existence en fonction du nombre de bords. Dans le cas $q(\rho) = \rho$ avec $0 < c_0^N < c_1^N < \dots < c_N^N$, et dans l'hypothèse où

$$0 \leq \max \left(c_0^N, \max_{i=1, \dots, N} (c_i^N - c_{i-1}^N) \right) \leq K \min \left(c_0^N, \min_{i=1, \dots, N} (c_i^N - c_{i-1}^N) \right). \quad (10.166)$$

Il vient alors le temps d'existence T_N tel que

$$T_N \geq \frac{\mathcal{K}}{\sqrt{(N+1)\mathcal{E}_N(0)}},$$

où $\mathcal{E}_N(t) = \frac{1}{N+1} \sum_{i=0}^N \|\xi_i^N(t)\|_{H^2}^2$.

Troisième partie
Etudes numériques

Les études cinétiques pour construire des modèles numériques pour des systèmes de lois de conservation hyperboliques sont utilisés depuis longtemps maintenant. En effet ceci permet de construire des schémas entropiques et robustes. Voir Kaniel [126], Giga et Myakawa [97], la méthode de transport-écroulement de Brenier [47],.... Ces méthodes ont été grandement développées par le groupe de Perthame (voir le livre [171]).

Citons quelques jalons des travaux sur les schémas numériques pour le système d'Euler [115], [151], [169], [170], [128], [195], et pour les solutions entropiques [85], [173], [149].

En particulier la branche des schémas de Flux-splitting (scalaire ou vectoriel) sont naturels dans une vision cinétique du problème car ils permettent au niveau cinétique de séparer efficacement l'information qui va vers la maille précédente et celle qui va vers la maille suivante selon le signe de la vitesse cinétique. De plus, ces méthodes sont efficaces et faciles à implémenter. Voir [42], [62] et [98] pour plus de détails. Citons également les travaux de [112] et [150].

Pour plus de détails sur les approches numériques des modèles BGK, on consultera [122], [156], [1], [42] et [98]. En particulier [42] montre les liens existant entre méthode numérique par splitting du premier ordre et modèles BGK cinétiques compatibles avec des familles d'entropie.

Nous présentons deux études numériques dans cette section. La première est liée aux modèles avec contraintes de la partie 2 et la seconde est liée à la relaxation avec une seule entropie compatible de la partie 1.

11 Flux-splitting pour modèles avec contraintes

Commençons par généraliser la formulation des modèles avec contraintes de type perte de masse de la section 8.2.

11.1 Modèles hyperboliques généraux avec contraintes

Pour un système général de la forme

$$\partial_t U + \partial_x F(U) = Q \frac{U}{U_1}, \quad (11.167)$$

avec $U = (U_1, \dots, U_k) \in \mathbb{R}^k$, $F : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^k$, $\frac{U}{U_1} = \left(1, \frac{U_2}{U_1}, \dots, \frac{U_k}{U_1}\right)$, et avec les contraintes

$$0 \leq U_1 \leq 1, \quad Q \leq 0, \quad (11.168)$$

et la relation d'exclusion

$$(1 - U_1) Q = 0, \quad (11.169)$$

la formulation mathématiques du problème s'écrit alors : soit $V = (1, V_2, \dots, V_k) \in \mathbb{R}^k$ avec $V \in L^\infty(Q)$ et

$$\partial_t U + \partial_x F(U) = Q V, \quad (11.170)$$

avec

$$0 \leq U_1 \leq 1, \quad Q \leq 0. \quad (11.171)$$

Afin d'avoir

$$Q U_1 = Q, \quad \text{et} \quad Q V = Q \frac{U}{U_1}, \quad (11.172)$$

dans un sens faible, nous demandons à la solution de (11.170) -(11.171) de vérifier les inégalités d'entropie

$$\partial_t \eta(U) + \partial_x G(U) \leq Q \eta'(1, V_2, \dots, V_k) \cdot (1, V_2, \dots, V_k), \quad (11.173)$$

pour une famille assez grande d'entropies-flux d'entropies (η, G) pour le système $\partial_t U + \partial_x F(U) = 0$.

Nous avons déjà étudié un modèle avec contrainte de ce type à la section 8.2. Etudions un autre cas, celui de l'écoulement d'une rivière modélisé par le système d'Euler. La densité ρ , la vitesse u et l'énergie e du fluide vérifie alors

$$\begin{cases} \partial_t \rho + \partial_x(\rho u) = Q, \\ \partial_t(\rho u) + \partial_x(\rho u^2 + p) = Qu, \\ \partial_t(\rho e) + \partial_x((\rho e + p)u) = Qe, \end{cases} \quad (11.174)$$

avec $\rho e = \rho \frac{u^2}{2} + \frac{1}{\gamma - 1} p$, où $\gamma > 1$ (système un peu plus général que (1.2) qui correspond au choix de $\gamma = 3$ pour $n = 1$ et avec la notation $p = \rho T$), et les contraintes et la perte de masse vérifie

$$0 \leq \rho \leq 1, \quad p \geq 0, \quad Q \leq 0, \quad (11.175)$$

et la relation d'exclusion

$$(1 - \rho)Q = 0. \quad (11.176)$$

Rappelons que les entropies pour ce système sont

$$\eta_S(\rho, q, E) = \rho S \left(\frac{p^{1/\gamma}}{\rho} \right). \quad (11.177)$$

La formulation faible qui permet d'écrire les produits $Q\rho$, Qu et Qe est alors

$$\begin{cases} \partial_t \rho + \partial_x(\rho u) = Q, \\ \partial_t(\rho u) + \partial_x(\rho u^2 + p) = Q\tilde{u}, \\ \partial_t(\rho e) + \partial_x((\rho e + p)u) = Q\tilde{e}, \end{cases} \quad (11.178)$$

avec

$$0 \leq \rho \leq 1, \quad p \geq 0, \quad Q \leq 0, \quad (11.179)$$

pour $\tilde{u}, \tilde{e} \in L^\infty(Q)$. Les produits entropiques faibles donnent ici

$$\partial_t \eta_S(\rho, u, e) + \partial_x G_S(\rho, u, e) \leq Q \left[S(\tilde{p}^{1/\gamma}) + S'(\tilde{p}^{1/\gamma}) \left(\frac{1-\gamma}{\gamma} \tilde{p}^{1/\gamma} \right) \right]. \quad (11.180)$$

Nous montrons, voir [18], qu'il suffit d'une entropie, celle associée ici à $S(v) = -\ln v$ pour avoir les produits entropiques faibles.

C'est une question ouverte de savoir combien d'entropies sont nécessaires pour un système de lois de conservation en général.

11.2 Schéma de Flux-splitting avec contraintes

Nous proposons maintenant un traitement numérique de ces systèmes hyperboliques avec contraintes de la forme (11.167). En particulier, nous souhaitons que les schémas obtenus prennent en compte les contraintes imposées mais également qu'elles permettent d'obtenir les inégalités d'entropie.

Notons Δt le pas de temps, une grille uniforme de pas en espace Δx , $\lambda = \Delta t/\Delta x$ et $x_j = j\Delta x$, $t_n = n\Delta t$.

Les schémas proposés sont basés sur une méthode de splitting. A chaque pas de temps, on commence par résoudre le système conservatif

$$\partial_t U + \partial_x F(U) = 0, \quad (11.181)$$

puis on projette sur les contraintes

$$\partial_t U = QV, \quad 1 \leq U_1 \leq 1, \quad Q \leq 0, \quad (1 - U_1)Q = 0.$$

Pour la première étape, nous utiliserons un schéma de Flux-splitting, comme proposé dans [62], à savoir

$$U_j^{n+1/2} - U_j^n + \lambda(F_{j+1/2}^n - F_{j-1/2}^n) = 0, \quad (11.182)$$

avec le flux

$$F_{j+1/2}^n = F^+(U_j^n) + F^-(U_{j+1}^n), \quad (11.183)$$

et $F^+(U) + F^-(U) = F(U)$.

Pour la seconde étape, nous remplaçons U_1 par $\min(U_1, 1)$, $V_i = U_i/U_1$ étant inchangé pour $i = 2, \dots, k$, c'est-à-dire

$$\begin{cases} (U_1)_j^{n+1} = \min((U_1)_j^{n+1/2}, 1), \\ (V_i)_j^{n+1} = \frac{(U_i)_j^{n+1}}{(U_1)_j^{n+1}} = \frac{(U_i)_j^{n+1/2}}{(U_1)_j^{n+1/2}} = (V_i)_j^{n+1/2}, \quad \text{pour } i = 2, \dots, k. \end{cases} \quad (11.184)$$

Ces schémas vérifient en particulier

Proposition 11.1 ([18]) *Etant donné un schéma de Flux-splitting entropique de la forme (11.182) associé à (11.181), le schéma de splitting constitué de (11.182)-(11.184) fournit un schéma pour (11.170) entropique au sens de (11.173).*

11.3 Convergence du schéma pour les gaz isentropiques

Prouvons la convergence du schéma dans le cas de la dynamique des gaz isentropiques. Notons $U = (\rho, \rho u)$ et $F(U) = (\rho u, \rho u^2 + \kappa \rho^\gamma)$. Pour la première étape du schéma, nous utilisons la décomposition du flux suivante :

$$F^+(U) = \int_{\xi \geq 0} \xi \left(1, (1 - \theta)u + \theta\xi \right) (a_\gamma \rho^{\gamma-1} - (\xi - u)^2)_+^{\frac{1-\theta}{2\theta}} d\xi, \quad (11.185)$$

$$F^-(U) = \int_{\xi \leq 0} \xi \left(1, (1 - \theta)u + \theta\xi \right) (a_\gamma \rho^{\gamma-1} - (\xi - u)^2)_+^{\frac{1-\theta}{2\theta}} d\xi, \quad (11.186)$$

avec $a_\gamma = 2\sqrt{\gamma\kappa}/(\gamma - 1)$, $\gamma \in]1, 3[$. Il s'agit de la décomposition du flux en utilisant la Maxwellienne des résultats théoriques obtenus dans la section 2.1 et qui donne le modèle BGK compatible avec toutes les entropies.

La seconde étape du schéma s'écrit ici

$$\begin{cases} \rho_j^{n+1} = \min(\rho_j^{n+1/2}, 1), \\ u_j^{n+1} = u_j^{n+1/2}, \end{cases} \quad (11.187)$$

et on pose

$$Q_j^n = \frac{\rho_j^{n+1} - \rho_j^{n+1/2}}{\Delta t} \leq 0. \quad (11.188)$$

Pour les lois de conservations scalaires, la convergence des schémas s'obtient par des techniques TVD et de la stabilité L^∞ . Pour les systèmes, en général, il n'y a pas d'estimation BV et on utilise plutôt des techniques de type compacité par compensation. La stabilité L^∞ provient, elle, de domaines invariants. Voir [98] pour le cas scalaire, [62], [63] pour la convergence du système d'Euler et [133] pour la convergence dans le cas des systèmes réguliers.

Un des outils de notre preuve est l'existence de solutions globales aux problèmes de Riemann pour le système

$$\partial_t w + \partial_x F^\pm(w) = 0, \quad (11.189)$$

avec des états à gauche et à droite arbitraires. Ce résultat est prouvé par Chen et LeFloch dans [62].

On définit alors des solutions approchées U_Δ de la façon suivante. Soit

$$U_\Delta(0, x) = \frac{1}{\Delta x} \int_{x_{j-1/2}}^{x_{j+1/2}} U^0(y) dy, \quad \text{pour } x \in]x_{j-1/2}, x_{j+1/2}[,$$

et supposant que $U_\Delta(t, x)$ est défini pour $t \leq t_n$, avec $n \in \mathbf{N}$, notons \tilde{U}_Δ^\pm la solution (sur $]x_j, x_{j+1}[$) du problème de Riemann (11.189) avec les données

$$\begin{cases} U_j^n & \text{pour } x < x_{j+1/2}, \\ U_{j+1}^n & \text{pour } x > x_{j+1/2}, \end{cases} \quad (11.190)$$

où U_j^n est la moyenne de $U_\Delta(t_n - 0, x)$ sur $]x_{j-1/2}, x_{j+1/2}[$. Posons

$$\tilde{U}_\Delta = \frac{1}{2}(\tilde{U}_\Delta^+ + \tilde{U}_\Delta^-),$$

sur $\{x_j < x < x_{j+1}, t_n < t < t_{n+1}\}$. Avec cette construction, le schéma de Flux-splitting coïncide avec les moyennes de ces fonctions selon $U_j^{n+1/2} = \frac{1}{\Delta x} \int_{x_{j-1/2}}^{x_{j+1/2}} \tilde{U}_\Delta(t_{n+1} - 0, x) dx$.

Finalement afin de prendre en compte l'étape de projection du schéma, posons $U_\Delta = \frac{\tilde{U}_\Delta}{\rho_j^{n+1/2}}$ sur $\{x_{j-1/2} < x < x_{j+1/2}, t_n < t < t_{n+1}\}$ si $\rho_j^{n+1/2} > 1$ et sinon on garde $U_\Delta = \tilde{U}_\Delta$ sur cet ensemble. Notons finalement que

$$U_j^{n+1} = \frac{1}{\Delta x} \int_{x_{j-1/2}}^{x_{j+1/2}} U_\Delta(t_{n+1} - 0, x) dx. \quad (11.191)$$

Le résultat de convergence que nous obtenons s'énonce de la façon suivante.

Théorème 11.2 ([18]) Soit $\rho^0 \in L^1(\mathbb{R}), 0 \leq \rho^0 \leq 1, u^0 \in L^\infty(\mathbb{R})$. Alors il existe $U = (\rho, \rho u)$, Q et v avec régularités $\rho \in L_t^\infty(0, \infty; L_x^\infty(\mathbb{R}) \cap L_x^1(\mathbb{R}))$, $u \in L_t^\infty(0, \infty; L_x^\infty(\mathbb{R}))$, $Q \in \mathcal{M}([0, \infty[\times \mathbb{R})$, $v \in L^\infty(Q)$ et telles que, pour une sous-suite, $U_\Delta \rightarrow U$ p.p. et dans $L_{loc}^1([0, +\infty[\times \mathbb{R})$ quand $\Delta \rightarrow 0$, où (U, Q, v) est une solution entropique de (8.134) avec les contraintes (8.135) et (8.136).

Pour prouver ce résultat, nous montrons que

$$\partial_t \eta(U_\Delta) + \partial_x G(U_\Delta) = -R_\Delta^\eta + Q_\Delta^\eta, \quad (11.192)$$

avec

$$\begin{aligned} R_\Delta^\eta(\varphi) &= \int_0^{t_m} \sum \{\sigma[\eta] - [G]\} \varphi(t, x(t)) dt \\ &+ \sum_{j,n} \int_{x_{j-1/2}}^{x_{j+1/2}} (\eta(U_\Delta(t_n - 0, x)) - \eta(U_j^n)) \varphi(t_n, x) dx \\ &+ \int_{\mathbb{R}} \eta(U_\Delta(t_m, x)) \varphi(t_m, x) dx - \int_{\mathbb{R}} \eta(U_\Delta(0, x)) \varphi(0, x) dx, \end{aligned} \quad (11.193)$$

où la sommation a lieu pour les instants $t > 0$ sur les chocs dans $U_\Delta(t)$ se trouvant en $x(t)$, et

$$\begin{aligned} Q_\Delta^\eta(\varphi) &= \sum_n \sum_{j; \rho_j^{n+1/2} > 1} \int_{x_{j-1/2}}^{x_{j+1/2}} [\eta'(1, \tilde{u}_\Delta) \cdot (1, \tilde{u}_\Delta) \Delta t Q_j^n] \varphi(t_n, x) dx \\ &- \sum_n \sum_{j; \rho_j^{n+1/2} > 1} \int_{x_{j-1/2}}^{x_{j+1/2}} P_\Delta^{n,j} \varphi(t_n, x) dx. \end{aligned}$$

où $P_\Delta^{n,j} = \int_0^1 (1-z) \eta''([z\tilde{\rho}_\Delta + (1-z)](1, \tilde{u}_\Delta)) \cdot (1, \tilde{u}_\Delta)^2 (Q_j^n)^2 (\Delta t)^2 dz$. Ceci fait apparaître deux quantités positives pour η positive convexe, à savoir $\eta'(1, u) \cdot (1, u)$ et η'' , et ainsi les Q_Δ^η sont des mesures négatives. Adaptant un argument de [62], nous obtenons également que R_Δ^η est dans un compact de H_{loc}^{-1} et tend vers 0 au sens des distributions quand $\Delta \rightarrow 0$ pour tout couple d'entropies C^2 convexe (η, G) . Appliquant alors le résultat de compacité par compensation de [145], il vient l'existence de $U \in L_{tx}^\infty$ tel que, pour une sous-suite, $U_\Delta \rightarrow U$ p.p. et dans L_{loc}^1 . Pour la convergence des produits d'entropie faibles, posant $Q_\Delta = Q_\Delta^{\eta_1}$ avec $\eta_1(\rho, \rho u) = \rho$, ceci donne $Q_\Delta = \sum_{n,j} Q_j^n \Delta t \delta_{t=t_n} \mathbb{1}_{]x_{j-1/2}, x_{j+1/2}[}(x) dx$. Posant

$v_\Delta(t, x) = \sum_{n,j} u_j^{n+1/2} \mathbb{1}_{]t_{n-1/2}, t_{n+1/2}[}(t) \mathbb{1}_{]x_{j-1/2}, x_{j+1/2}[}(x)$, la fonction v_Δ est continue sur les

mesures de Dirac de Q_Δ (alors que u_Δ ne l'est pas), ces deux distributions peuvent donc se multiplier et $Q_\Delta v_\Delta = Q_\Delta^{\eta_2}$ avec $\eta_2(\rho, \rho u) = \rho u$. Les produits d'entropie faibles résultent alors du lemme suivant.

Lemme 11.3 ([18]) Soit Q_Δ des mesures négatives et $v_\Delta \in L^\infty(Q_\Delta)$. Si (Q_Δ) est bornée dans $\mathcal{M}_{loc}([0, \infty[\times \mathbb{R})$ et $(\|v_\Delta\|_{L^\infty(Q_\Delta)})$ est bornée, alors il existe une mesure Q et une fonction $v \in L^\infty(Q)$ telles que, après extraction d'une sous-suite, $Q_\Delta \rightarrow Q$, $Q_\Delta v_\Delta \rightarrow Qv$, $Q_\Delta S(v_\Delta) \rightarrow Q^S \leq QS(v)$ et $Q_\Delta^\eta - Q_\Delta[\eta'(1, v_\Delta) \cdot (1, v_\Delta)] \rightarrow \tilde{Q}^\eta \leq 0$ pour toute fonction convexe S .

Ainsi le terme à contrôler vérifie, en utilisant le lemme avec $S(v) = \eta'(1, v) \cdot (1, v)$,

$$Q_{\Delta}^{\eta} \rightarrow Q^S + \tilde{Q}^{\eta} \leq Q\eta'(1, v) \cdot (1, v),$$

ce qui conclut la preuve.

12 Flux-splitting pour le modèle avec une seule entropie

Dans cette section, nous présentons l'étude numérique liée au travail portant sur la convergence d'une équation cinétique vers la dynamique des gaz isentropiques avec une seule entropie compatible de la section 3. A nouveau l'importance d'une telle étude provient de la nécessité de pouvoir traiter des schémas réalistes car provenant de situations physiques où une seule entropie compatible existe. Nous renvoyons à [62] et [133] pour le cas de relaxations similaires mais avec toute une famille d'entropies compatibles. Voir également l'article [107] qui considère le cas d'une seule entropie compatible pour un schéma de relaxation associé au système de l'élastodynamique. Voir aussi [59], [86], [87] pour des estimations BV -faible pour des méthodes de volumes finis pour des lois de conservation scalaires qui sont également liées à des estimations de gradient via la dissipation d'entropie.

12.1 Présentation du schéma et théorème de convergence

Le contexte dans lequel nous nous plaçons est le suivant. Nous considérons un système de k lois de conservation en dimension un, c'est-à-dire (1.1) avec $n = 1$, et où le flux $F : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^k$ vérifie la décomposition de flux

$$F = F^+ + F^-, \quad (12.194)$$

où

$$F^+ \text{ et } F^- \text{ sont Lipschitz,} \quad (12.195)$$

et vérifie

$$\pm \nabla F^{\pm} \text{ a des valeurs propres réelles positives.} \quad (12.196)$$

L'argument de compacité sera de type compacité par compensation, basé sur des estimations

$$\partial_t \eta(U_{\varepsilon}) + \partial_x G(U_{\varepsilon}) \in \text{compact of } H_{loc}^{-1}, \quad (12.197)$$

aussi nous supposons

l'existence d'une famille \mathcal{F} d'entropies-flux d'entropies (η, G) de classe C^2 telles que (12.197) pour tout $(\eta, G) \in \mathcal{F}$ entraîne, pour une suite bornée $(U_{\varepsilon})_{\varepsilon > 0}$, (Hc)
que, pour une sous-suite, $U_{\varepsilon} \rightarrow U$ p.p..

Nous prouvons que les bornes (12.197) pour **toutes** les entropies peuvent être obtenues pour les systèmes avec **une** seule entropie η_c compatible la décomposition de flux, à savoir principalement pour laquelle il existe ϑ^+ et ϑ^- tels que $(\vartheta^{\pm})' = \eta_c'(F^{\pm})'$. Ceci entraîne une inégalité d'entropie discrète et la dissipativité du schéma. Dans notre travail, l'entropie

compatible va nous permettre d'obtenir l'estimation du gradient des solutions numériques approchées (U_Δ) :

$$\|\partial_t U_\Delta\|_{L^2_{tx}} \leq \frac{C}{\sqrt{\Delta x}}, \quad \|\partial_x U_\Delta\|_{L^2_{tx}} \leq \frac{C}{\sqrt{\Delta x}}, \quad (12.198)$$

où Δx est le pas en espace du schéma. Il s'agit de l'analogie numérique des estimations (3.29).

Pour un pas de temps Δt et un pas uniforme en espace Δx , posons $\lambda = \Delta t/\Delta x$ et $x_j = j\Delta x$, $t_n = n\Delta t$. Pour $U^0 \in L^1 \cap L^\infty(\mathbb{R}^N)$ une donnée initiale, la discrétisation sera

$$U_j^0 = \frac{1}{\Delta x} \int_{x_j}^{x_{j+1}} U^0(y) dy \text{ pour } x \in]x_j, x_{j+1}[. \quad (12.199)$$

Le schéma s'écrit

$$U_j^{n+1} - U_j^n + \lambda(F_{j+1/2}^n - F_{j-1/2}^n) = 0, \quad (12.200)$$

avec le flux numérique

$$F_{j+1/2}^n = F^+(U_j^n) + F^-(U_{j+1}^n). \quad (12.201)$$

Les solutions approchées sont définies, à Δx fixé, par

$$U_\Delta(t, x) = \frac{1}{\Delta t} \left[\frac{U_{j+1}^{n+1} - U_j^{n+1} - U_{j+1}^n + U_j^n}{\Delta x} (x - x_j) + U_j^{n+1} - U_j^n \right] (t - t_n), \\ + \frac{U_{j+1}^n - U_j^n}{\Delta x} (x - x_j) + U_j^n \\ \text{pour } x_j < x < x_{j+1}, t_n \leq t < t_{n+1}.$$

Nous avons besoin de l'hypothèse technique suivante, qui peut être supprimée dans le cas d'une périodicité en x ,

$$\text{il existe } (U_\infty^n)_n \text{ telle que } U_j^n \xrightarrow{j \rightarrow \pm\infty} U_\infty^n, \forall n \in \mathbf{N}. \quad (12.202)$$

Le théorème de convergence numérique que nous obtenons est le suivant.

Théorème 12.1 ([19]) *Soit un système (1.1) avec $n = 1$ pour lequel l'hypothèse (Hc) est vérifiée. Soit η_c une entropie, et $U^0 \in L^1 \cap L^\infty(\mathbb{R})$ telle que $\eta_c(U^0) \in L^1(\mathbb{R})$. Supposons qu'il existe une décomposition de flux vérifiant (12.195)-(12.196), $(\mathcal{H}_{\eta_c}^1)$ et $(\mathcal{H}_{\eta_c}^2)$ (voir la section suivante) et que cela donne une suite $(U_j^n)_{n,j}$ bornée vérifiant (12.202). Alors, à extraction près d'une sous-suite, $U_\Delta \rightarrow U$ quand $\Delta \rightarrow 0$ où U est solution de (1.1) avec l'inégalité d'entropie pour η_c et la donnée initiale U^0 .*

Le théorème s'applique au cas scalaire et au p-système

$$\begin{cases} \partial_t \rho - \partial_x u = 0, \\ \partial_t u + \partial_x p(\rho) = 0, \end{cases} \quad (12.203)$$

avec $\rho, u \in \mathbb{R}$ et une non-linéarité $p(\rho)$ vérifiant $p'(\rho) < 0$.

Pour ce résultat, nous avons besoin de deux objets : la notion d' η -dissipativité et la formulation cinétique avec trois vitesses.

12.2 η -dissipativité et estimation du gradient

La notion de dissipativité dont nous avons besoin par rapport à F^+ , F^- et $Id - \lambda(F^+ - F^-)$, et qui est liée aux hypothèses $(\mathcal{H}_{\eta_c}^1)$ et $(\mathcal{H}_{\eta_c}^2)$ est à relier à (12.196) et à une condition de type CFL. La première hypothèse est liée aux inégalités d'entropie discrètes et la seconde à une hypothèse de non-dégénérescence et permet d'obtenir les estimations (12.198). Rappelons le point de départ de cette notion définie par

Définition 12.2 (Bouchut [42]) *Soit $\eta(u)$ une fonction convexe. W est η -dissipative dans $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^N$ si*

$$W'(u)^t \eta''(u) \text{ est symétrique,} \quad (12.204)$$

et si, définissant $G_\eta[W]$ selon

$$G_\eta[W]'(u) = \eta'(u)W'(u), \quad (12.205)$$

la dissipation d'entropie élémentaire

$$D_\eta[W](u, v) = G_\eta[W](u) - G_\eta[W](v) + \eta'(u)(W(v) - W(u)) \quad (12.206)$$

est négative pour tout $u, v \in \mathcal{U}$.

Voir [40], [42] pour plus de détails, en particulier pourquoi les propriétés de dissipation d'entropie sont localement équivalentes à la condition d'entropie de [62].

Ceci nous permet de définir notre première hypothèse pour le système hyperbolique qui concerne la dissipation de la décomposition de flux par rapport à l'entropie compatible η_c :

$$F^+, -F^- \text{ et } Id - \lambda(F^+ - F^-) \text{ sont } \eta_c - \text{dissipative.} \quad (\mathcal{H}_{\eta_c}^1)$$

Cette propriété entraîne les inégalités d'entropie discrètes :

Théorème 12.3 (Bouchut [42]) *Soit $\eta_c(u)$ une fonction convexe. Supposons que $(\mathcal{H}_{\eta_c}^1)$ est vérifiée. Alors le schéma de flux-splitting (12.200)-(12.201) vérifie les inégalités d'entropie discrètes*

$$\eta_c(U_j^{n+1}) - \eta_c(U_j^n) + \lambda(\vartheta_{\eta_c, j+1/2}^n - \vartheta_{\eta_c, j-1/2}^n) = S_{\eta_c, j}^{n+1} \leq 0, \quad (12.207)$$

où

$$\vartheta_{\eta_c, j+1/2}^n = \vartheta_{\eta_c}^+(U_j^n) + \vartheta_{\eta_c}^-(U_{j+1}^n), \quad (12.208)$$

$$(\vartheta_{\eta_c}^\pm)' = \eta_c'(F^\pm)'. \quad (12.209)$$

Remarque 12.1 C'est en ce sens précis que l'entropie η_c est dite compatible avec le schéma de Flux-splitting.

Pour notre travail, nous avons besoin d'introduire une nouvelle notion que nous appelons stricte η -dissipativité.

Définition 12.4 ([19]) *Soit $\eta(u)$ une fonction convexe. W est dite strictement η -dissipative dans \mathcal{U} si elle est η -dissipative et s'il existe $\alpha_W > 0$ tel que*

$$D_\eta[W](u, v) \leq -\alpha_W \|u - v\|^2, \quad \text{pour tout } u, v \in \mathcal{U}, \quad (12.210)$$

avec $\|\cdot\|$ la norme euclidienne.

Nous pouvons alors formuler la seconde hypothèse pour notre système hyperbolique, à savoir

$$Id - \lambda(F^+ - F^-) \text{ et } (F^+ \text{ ou } -F^-) \text{ sont strictement } \eta_c - \text{dissipative.} \quad (\mathcal{H}_{\eta_c}^2)$$

Nous avons alors l'estimation des solutions approchées.

Théorème 12.5 ([19]) *Soit $\eta_c(u)$ une fonction convexe et $U^0 \in L^1 \cap L^\infty(\mathbb{R})$ une donnée initiale telle que $\eta_c(U^0) \in L^1(\mathbb{R})$. Supposons que $(\mathcal{H}_{\eta_c}^1)$, $(\mathcal{H}_{\eta_c}^2)$ et (12.202) sont satisfaites. Alors il existe une constante C_1 telle que*

$$\left(\int_0^T \int_{\mathbb{R}} |\partial_x U_\Delta(t, x)|^2 dx dt \right)^{1/2} \leq \frac{C_1}{\sqrt{\Delta x}}, \quad \left(\int_0^T \int_{\mathbb{R}} |\partial_t U_\Delta(t, x)|^2 dx dt \right)^{1/2} \leq \frac{C_1}{\sqrt{\Delta x}}.$$

12.3 Formulation cinétique avec trois vitesses et dissipation d'entropie

Un second outil pour prouver la convergence du schéma de Flux-splitting est la possibilité de l'écrire par une formulation cinétique à trois vitesses, ce qui permet de bien suivre l'évolution de l'information. Consulter [62], [2], [42] et les références contenues dedans pour plus de détails sur cet aspect que nous présentons dans le cas qui nous intéresse. La formulation cinétique utilisée est basée sur une méthode de transport-projection, introduite par Brenier [47], [48]. (Voir aussi [74], [192] et [193] pour des résultats de convergence avec un transport-projection). Il s'agit d'une version discrète en temps des modèles BGK. Nous utiliserons le modèle suivant

$$\partial_t f + a(\xi) \partial_x f = \sum_{n=1}^{+\infty} \delta(t - t_n) (Mf^n - f^n), \quad (12.211)$$

où

$$Mf^n(x, \xi) = M(U_j^n, \xi) \quad \text{pour } x \in]x_j, x_{j+1}[, \quad (12.212)$$

avec

$$U_j^n = \frac{1}{\Delta x} \int_{x_j}^{x_{j+1}} \tilde{U}_j^n(x) dx, \quad \text{pour } x \in]x_j, x_{j+1}[, \quad (12.213)$$

et

$$\tilde{U}_j^n(x) = \int f^n(x, v) dv, \quad \text{pour } x \in]x_j, x_{j+1}[, \quad (12.214)$$

avec

$$f^n(x, \xi) = \lim_{t \rightarrow t_n^-} f(t, x, \xi), \quad \text{pour } n \geq 1, \quad (12.215)$$

et la condition initiale

$$f^0(x, \xi) = M(U_j^0, \xi), \quad x \in]x_j, x_{j+1}[, \quad U_j^0 \text{ définie par (12.199),} \quad (12.216)$$

et avec $\xi \in \{-1, 0, 1\}$, $a(-1) = -c$, $a(0) = 0$, $a(1) = c$, $c = 1/\lambda$ et la Maxwellienne

$$\begin{aligned} M(u, -1) &= -\lambda F^-(u), \\ M(u, 0) &= u - \lambda(F^+(u) - F^-(u)), \\ M(u, 1) &= \lambda F^+(u). \end{aligned} \quad (12.217)$$

L'intégrale par rapport à ξ est ici la somme sur $\xi \in \{-1, 0, 1\}$. La Maxwellienne vérifie les relations de consistence

$$\int M(U, \xi) d\xi = U, \quad \int a(\xi)M(U, \xi) d\xi = F(U), \quad (12.218)$$

$$\int_{\pm a(\xi) > 0} a(\xi)M(U, \xi) d\xi = F^\pm(U). \quad (12.219)$$

Sur $[t_n, t_{n+1}[$, nous avons

$$\begin{aligned} f(t, x, -1) &= f(t_n, x + c(t - t_n), -1), \\ f(t, x, 0) &= f(t_n, x, 0), \\ f(t, x, 1) &= f(t_n, x - c(t - t_n), 1), \end{aligned}$$

alors, pour $x \in]x_j, x_{j+1}[$,

$$\begin{aligned} f^{n+1}(x, -1) &= f(t_n, x + \Delta x, -1) = M(U_{j+1}^n, -1), \\ f^{n+1}(x, 0) &= f(t_n, x, 0) = M(U_j^n, 0), \\ f^{n+1}(x, 1) &= f(t_n, x - \Delta x, 1) = M(U_{j-1}^n, 1). \end{aligned}$$

Ainsi $f^n(x, v)$ est constante en x sur $]x_j, x_{j+1}[$, et $U_j^n = \tilde{U}_j^n(x)$ sur $]x_j, x_{j+1}[$. Alors sur $]x_j, x_{j+1}[$, pour $n \geq 0$,

$$\begin{aligned} U_j^{n+1} &= \int f^{n+1}(x, v) dv \\ &= f^{n+1}(x, -1) + f^{n+1}(x, 0) + f^{n+1}(x, 1) \\ &= M(U_{j+1}^n, -1) + M(U_j^n, 0) + M(U_{j-1}^n, 1) \\ &= -\lambda F^-(U_{j+1}^n) + U_j^n - \lambda(F^+(U_j^n) - F^-(U_j^n)) + \lambda F^+(U_{j-1}^n). \end{aligned}$$

Le modèle cinétique redonne bien le schéma de Flux-splitting vectoriel [42]. Dans cette référence, il est même prouvé que tout schéma cinétique est au premier ordre équivalent à un modèle à trois vitesses.

Munis de cet outil, nous obtenons des estimations sur l'écart entre U_Δ et f . Comme dans le cas continue, il vient une estimation sur $F(U_\Delta) - \int a(\xi)f d\xi$.

Théorème 12.6 ([19]) *Soit $\eta_c(u)$ une fonction convexe et $U^0 \in L^1 \cap L^\infty(\mathbb{R}^N)$ une donnée initiale telle que $\eta_c(U^0) \in L^1(\mathbb{R})$. Supposons que (12.195), $(\mathcal{H}_{\eta_c}^1)$ et $(\mathcal{H}_{\eta_c}^2)$ sont satisfaites. Alors il existe une constante C_2 telle que*

$$\left(\int_0^T \int_{\mathbb{R}} \left| F(U_\Delta(t, x)) - \int a(\xi)f(t, x, \xi) d\xi \right|^2 dx dt \right)^{1/2} \leq C_2 \sqrt{\Delta x}. \quad (12.220)$$

Mais ici, différemment du cas continue où la solution approchée est égale à l'intégrale de la fonction cinétique par rapport à la variable cinétique, il faut estimer l'écart entre $\int f d\xi$ et U_Δ .

Théorème 12.7 ([19]) Soit $\eta_c(u)$ une fonction convexe et $U^0 \in L^1 \cap L^\infty(\mathbb{R}^N)$ une donnée initiale telle que $\eta_c(U^0) \in L^1(\mathbb{R})$. Supposons que (12.195), $(\mathcal{H}_{\eta_c}^1)$ et $(\mathcal{H}_{\eta_c}^2)$ sont vérifiées. Alors il existe une constante C_3 telle que

$$\left(\int_0^T \int_{\mathbb{R}} \left| U_\Delta(t, x) - \int f(t, x, \xi) d\xi \right|^2 dx dt \right)^{1/2} \leq C_3 \sqrt{\Delta x}. \quad (12.221)$$

Nous allons exploiter tous ces résultats pour conclure à la convergence du schéma.

12.4 Bornes sur les entropies et convergence

Afin d'obtenir le Théorème 12.1, il convient d'estimer toutes les entropies à partir de l'information obtenue dans les deux sections précédentes à partir de l'entropie compatible. Pour tout couple d'entropie-flux d'entropie (η, G) , il vient la décomposition

$$\begin{aligned} \partial_t \eta(U_\Delta) + \partial_x G(U_\Delta) &= \partial_t \left[\eta'(U_\Delta) \cdot \left(U_\Delta - \int f d\xi \right) \right] \\ &\quad - \eta''(U_\Delta) \cdot \partial_t U_\Delta \cdot \left(U_\Delta - \int f d\xi \right) \\ &\quad + \partial_x \left[\eta'(U_\Delta) \cdot \left(F(U_\Delta) - \int a(\xi) f d\xi \right) \right] \\ &\quad - \eta''(U_\Delta) \cdot \partial_x U_\Delta \cdot \left(F(U_\Delta) - \int a(\xi) f d\xi \right). \end{aligned}$$

Montrons le contrôle de l'un de ces termes

$$\begin{aligned} &\int_0^T \int_{-R}^R \left| -\eta''(U_\Delta) \cdot \partial_t U_\Delta \cdot \left(U_\Delta - \int f d\xi \right) \right| dx dt \\ &\leq \|\eta''(U_\Delta)\|_{L^\infty([0, T[\times]-R, R])} \left(\iint |\partial_t U_\Delta|^2 dx dt \right)^{1/2} \left(\iint \left| U_\Delta - \int f d\xi \right|^2 dx dt \right)^{1/2} \\ &\leq \|\eta''(U_\Delta)\|_{L^\infty([0, T[\times]-R, R])} \frac{C_1}{\sqrt{\Delta x}} C_3 \sqrt{\Delta x} \\ &\leq C_R. \end{aligned}$$

Il est alors possible d'appliquer la compacité par compensation et de conclure.

Travaux depuis la fin de la thèse

1. Averaging lemmas with a force term in the transport equation, avec S. Junca, accepté dans le *Journal de Mathématiques Pures et Appliquées* (2009)
2. From discrete velocity Boltzmann equations to gas dynamics before shocks, avec A.E. Tzavaras, A. Vasseur, *Journal of Statistical Physics* 135 (2009), 151-173.
3. The multi-water-bag equations for collisionless kinetic modeling, avec N. Besse, Y. Brenier et P. Bertrand, *Kinet. Relat. Models* 2 (2009), no. 1, 39–80.
4. A traffic-flow model with constraint for the modeling of traffic jams, avec P. Degond, V. Le Blanc, S. Moutari, M. Rascle et J. Royer, *Mathematical Models and Methods in Applied Sciences*, Vol. 18, No 1 (2008) 1269-1298.
5. Model for the formation and evolution of traffic jams, avec P. Degond, M. Delitala et M. Rascle, *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, 187 (2008), no. 2, 185–220.
6. High-field limit from a kinetic equation to multidimensional scalar conservation laws, avec N. Mauser et F. Poupaud, *Journal of Hyperbolic Differential Equations*, 4 (2007), no. 1, 123-145.
7. From kinetic equations to multidimensional isentropic gas dynamics before shocks, avec A. Vasseur, *SIAM, Journal on Mathematical Analysis*, 36 (2005), no 6, 1807-1835.
8. Convergence of flux vector splitting schemes with single entropy inequality for hyperbolic systems of conservation laws, *Numerische Mathematik*, 99 (2005), no. 4, 585-604.
9. Numerical flux-splitting for a class of hyperbolic systems with unilateral constraint, *Mathematical Modelling and Numerical Analysis*, 37 (2003), no. 3, 479-494.
10. Relaxation to isentropic gas dynamics for a BGK system with single kinetic entropy, avec F. Bouchut, *Methods and Applications of Analysis*, 9(2) (2002) 313-327.

Travaux issus de la thèse

1. Weak solutions for a hyperbolic system with unilateral constraint and mass loss, avec F. Bouchut, *Annales de l'Institut Henri Poincaré, Analyse non linéaire*, 20 (2003), 975-997.
2. Weak entropy boundary conditions for isentropic gas dynamics via kinetic relaxation, avec F. Bouchut, *Journal of Differential Equations*, 185 (2002) 251-270.
3. Kinetic invariant domains and relaxation limit from a BGK model to isentropic gas dynamics, avec F. Bouchut, *Asymptotic analysis*, Vol. 31, No. 2 (2002) 153-176.
4. Existence and weak stability for a pressureless model with unilateral constraint, *Mathematical Models and Methods in Applied Sciences*, Vol. 12, No. 2 (2002) 249-272.
5. Solution with finite energy to a BGK system relaxing to isentropic gas dynamics, avec F. Bouchut, *Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse*, 9 (2000), 605-630.

Bibliographie

- [1] D. Aregba-Driollet, R. Natalini, Convergence of relaxation schemes for conservation laws, *Appl. Anal.* 61 (1996), 163–193.
- [2] D. Aregba-Driollet, R. Natalini, Discrete kinetic schemes for multidimensional systems of conservation laws, *SIAM J. Numer. Anal.* 37 (2000), no. 6, 1973–2004.
- [3] A. Arnold, J.A. Carrillo, I. Gamba, C.-W. Shu, Low and high field scaling limits for the Vlasov- and Wigner-Poisson-Fokker-Planck system, *The Sixteenth International Conference on Transport Theory, Part I (Atlanta, GA, 1999)*, *Transport Theory Statist. Phys.* 30 (2001), no. 2-3, 121–153.
- [4] A. Arnold, P. Markowich, G. Toscani, A. Unterreiter, On convex Sobolev inequalities and the rate of convergence to equilibrium for Fokker-Planck type equations, *Comm. Partial Differential Equations* 26 (2001), no. 1-2, 43–100.
- [5] A. Arnold, P. Markowich, G. Toscani, A. Unterreiter, On generalized Csiszr-Kullback inequalities, *Monatsh. Math.* 131 (2000), no. 3, 235–253.
- [6] A. Aw, A. Klar, A. Materne, M. Rascle, Derivation of continuum traffic flow models from microscopic follow-the-leader models, *SIAM J. Appl. Math.*, 63 (2002), pp. 259–278.
- [7] A. Aw, M. Rascle, Resurrection of second order models of traffic flow, *SIAM J. Appl. Math.*, 60 (2000), pp. 916–938.
- [8] M. Bando, K. Hesebe, A. Nakayama, A. Shibata and Y. Sugiyama, Dynamical model of traffic congestion and numerical simulation, *Phys. Rev. E*, 51 (1995) 1035–1042.
- [9] C. Bardos, F. Golse, C.D. Levermore, Fluid dynamic limits of kinetic equations, I. Formal derivations, *J. Statist. Phys.* 63 (1991), no. 1-2, 323–344.
- [10] C. Bardos, F. Golse, C.D. Levermore, Fluid dynamic limits of kinetic equations, II. Convergence proofs for the Boltzmann equation, *Comm. Pure Appl. Math.* 46 (1993), no. 5, 667–753.
- [11] C. Bardos, F. Golse, and C. D. Levermore. The acoustic limit for the Boltzmann equation, *Arch. Ration. Mech. Anal.*, 153(3) :177–204, 2000.
- [12] C. Bardos, A. Le Roux, J.-C. Nédélec, First order quasilinear equations with boundary conditions, *Comm. Partial Differential Equations* 4 (1979), no. 9, 1017–1034.
- [13] L. Barthélemy, Problème d’obstacle pour une équation quasi-linéaire du premier ordre, *Ann. Fac. Sci. Toulouse Math.* 9 (1988), 137-159.
- [14] J. T. Beale. Large-time behavior of discrete velocity Boltzmann equations. *Comm. Math. Phys.*, 106(4) :659–678, 1986.
- [15] A. Benabdallah, Le "p système" dans un intervalle, *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.* 303 (1986), no. 4, 123–126.

- [16] A. Benabdallah, D. Serre, Problèmes aux limites pour des systèmes hyperboliques non linéaires de deux équations à une dimension d'espace, *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.* 305 (1987), no. 15, 677–680.
- [17] F. Berthelin, Existence and weak stability for a pressureless model with unilateral constraint, *Mathematical Models and Methods in Applied Sciences*, Vol. 12, No. 2 (2002) 249-272.
- [18] F. Berthelin, Numerical flux-splitting for a class of hyperbolic systems with unilateral constraint, *Mathematical Modelling and Numerical Analysis*, 37 (2003), no. 3, 479-494.
- [19] F. Berthelin, Convergence of flux vector splitting schemes with single entropy inequality for hyperbolic systems of conservation laws, *Numerische Mathematik*, 99 (2005), no. 4, 585-604.
- [20] F. Berthelin, F. Bouchut, Solution with finite energy to a BGK system relaxing to isentropic gas dynamics, *Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse*, 9 (2000), 605-630.
- [21] F. Berthelin, F. Bouchut, Kinetic invariant domains and relaxation limit from a BGK model to isentropic gas dynamics, *Asymptotic analysis*, Vol. 31, No. 2 (2002) 153-176.
- [22] F. Berthelin, F. Bouchut, Weak entropy boundary conditions for isentropic gas dynamics via kinetic relaxation, *Journal of Differential Equations*, 185 (2002) 251-270.
- [23] F. Berthelin, F. Bouchut, Relaxation to isentropic gas dynamics for a BGK system with single kinetic entropy, *Methods and Applications of Analysis*, 9(2) (2002) 313-327.
- [24] F. Berthelin, F. Bouchut, Weak solutions for a hyperbolic system with unilateral constraint and mass loss, *Annales de l'Institut Henri Poincaré, Analyse non linéaire*, 20 (2003), 975-997.
- [25] F. Berthelin, P. Degond, M. Delitala et M. Rascle, Model for the formation and evolution of traffic jams, *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, 187 (2008), no. 2, 185–220.
- [26] F. Berthelin, P. Degond, V. Le Blanc, S. Moutari, M. Rascle et J. Royer, A traffic-flow model with constraint for the modeling of traffic jams, *Mathematical Models and Methods in Applied Sciences*, Vol. 18, No 1 (2008) 1269-1298.
- [27] F. Berthelin, S. Junca, Averaging lemmas with a force term in the transport equation, accepté dans le *Journal de Mathématiques Pures et Appliquées* (2009).
- [28] F. Berthelin, N. Mauser et F. Poupaud, High-field limit from a kinetic equation to multidimensional scalar conservation laws, *Journal of Hyperbolic Differential Equations*, 4 (2007), no. 1, 123-145.
- [29] F. Berthelin, A.E. Tzavaras, A. Vasseur, From discrete velocity Boltzmann equations to gas dynamics before shocks, *Journal of Statistical Physics* 135 (2009), 151-173.
- [30] F. Berthelin, A. Vasseur, From kinetic equations to multidimensional isentropic gas dynamics before shocks, *SIAM, Journal on Mathematical Analysis*, 36 (2005), no 6, 1807-1835.
- [31] P. Bertrand and M.R. Feix, *Non linear electron plasma oscillation : the water bag model* Phys. Lett., 28A, 68-69, (1968).
- [32] P. Bertrand and M.R. Feix, *Frequency shift of non linear electron plasma oscillation* Phys. Lett., 29A, 489-490, (1969).

- [33] N. Besse, F. Berthelin, Y. Brenier et P. Bertrand, The multi-water-bag equations for collisionless kinetic modeling, *Kinet. Relat. Models* 2 (2009), no. 1, 39–80.
- [34] M. Bézard, Régularité L^p précisée des moyennes dans les équations de transport, *Bull. Soc. Math. France* 122 (1994), no. 1, 29–76.
- [35] P.L. Bhatnagar, E.P. Gross, M. Krook, A model for collision processes in gases, *Phys. Rev.* 94, 511-514 (1954).
- [36] L. Boltzmann, Lectures on gas theory, University of California Press, Berkeley-Los Angeles, Calif. 1964.
- [37] J.-M. Bony. Solutions globales bornées pour les modèles discrets de l'équation de Boltzmann, en dimension 1 d'espace. In *Journées "Équations aux dérivées partielles" (Saint Jean de Monts, 1987)*, pages Exp. No. XVI, 10. École Polytech., Palaiseau, 1987.
- [38] J.-M. Bony. Existence globale à données de Cauchy petites pour les modèles discrets de l'équation de Boltzmann. *Comm. Partial Differential Equations*, 16(4-5) :533–545, 1991.
- [39] F. Bouchut, On zero pressure gas dynamics, *Advances in kinetic theory and computing*, 171-190, Ser. Adv. Math. Appl. Sci. 22 (1994), World Sci. Publishing, River Edge, NJ.
- [40] F. Bouchut. Construction of BGK models with a family of kinetic entropies for a given system of conservation laws. *J. Statist. Phys.*, 95(1-2) :113–170, 1999.
- [41] F. Bouchut, Hypocoelliptic regularity in kinetic equations, *J. Math. Pures Appl.*, 81(11) :1135–1159, 2002.
- [42] F. Bouchut, Entropy satisfying flux vector splittings and kinetic BGK models, *Numer. Math.* 94 (2003), 623-672.
- [43] F. Bouchut, Y. Brenier, J. Cortes, J.-F. Ripoll, A hierarchy of models for two-phase flows, *J. of Nonlinear Science* 10 (2000), 639-660.
- [44] F. Bouchut, L. Desvillettes, Averaging lemmas without time Fourier transform and application to discretized kinetic equations, *Proceedings of the Royal Society of Edinburgh* 129A (1999), 19-36.
- [45] F. Bouchut, F. Golse, M. Pulvirenti, Kinetic equations and asymptotic theory, *Series in Appl. Math.*, Gauthiers-Villars, 2000.
- [46] F. Bouchut, F. James, Duality solutions for pressureless gases, monotone scalar conservation laws, and uniqueness, *Comm. Partial Diff. Eq.* 24 (1999), 2173-2189.
- [47] Y. Brenier. Résolution d'équations d'évolution quasilineaires en dimension N d'espace à l'aide d'équations linéaires en dimension $N + 1$. *J. Differential Equations*, 50(3) :375–390, 1983.
- [48] Y. Brenier, Averaged multivalued solutions for scalar conservation laws, *SIAM J. Numer. Anal.* 21 (1984), no. 6, 1013–1037.
- [49] Y. Brenier. Convergence of the Vlasov-Poisson system to the incompressible Euler equations. *Comm. Partial Differential Equations*, 25(3-4) :737–754, 2000.
- [50] Y. Brenier, Hydrodynamic structure of the augmented Born-Infeld equations, *Arch. Ration. Mech. Anal.* 172 (2004), no. 1, 65–91.
- [51] Y. Brenier, L. Corrias, A kinetic formulation for multi-branch entropy solutions of scalar conservation laws, *Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire* 15 (1998), 169-190.

- [52] Y. Brenier, E. Grenier, Sticky particles and scalar conservation laws, *SIAM J. Numer. Anal.* 35 (1998), 2317-2328.
- [53] Y. Brenier, R. Natalini, and M. Puel. On a relaxation approximation of the incompressible Navier-Stokes equations. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 132(4) :1021–1028 (electronic), 2004.
- [54] H. Cabannes, R. Gatignol, and L.-S. Luo. *The discrete Boltzmann equation (theory and applications)*. Henri Cabannes, Paris, 2003. Revised from the lecture notes given at the University of California, Berkeley, CA, 1980, Available electronically. Henri Cabannes, Paris, 2003. viii+55 pp.
- [55] R. E. Caflisch. The fluid dynamic limit of the nonlinear Boltzmann equation, *Comm. Pure Appl. Math.*, 33(5) :651–666, 1980.
- [56] R. E. Caflisch and G. C. Papanicolaou. The fluid dynamical limit of a nonlinear model Boltzmann equation, *Comm. Pure Appl. Math.*, 32(5) :589–616, 1979.
- [57] C. Cercignani, The Boltzmann equation and its applications, Applied Mathematical Sciences, 67, Springer-Verlag, New York, 1988.
- [58] C. Cercignani, R. Illner, M. Pulvirenti, The mathematical theory of dilute gases, Applied Mathematical Sciences, 106, Springer-Verlag, New York, 1994.
- [59] S. Champier, T. Gallouët, R. Herbin, Convergence of an upstream finite volume scheme for a nonlinear hyperbolic equation on a triangular mesh, *Numer. Math.* 66 (1993), no. 2, 139–157.
- [60] G.-Q. Chen, Remarks on R.J. DiPerna’s paper : ”Convergence of the viscosity method for isentropic gas dynamics” [Comm. Math. Phys. 91 (1983), no. 1, 1–30], *Proc. Amer. Math. Soc.* 125 (1997), no. 10, 2981–2986.
- [61] G.-Q. Chen, H. Frid, Divergence-measure fields and hyperbolic conservation laws, *Arch. Ration. Mech. Anal.* 147 (1999), no. 2, 89–118.
- [62] G.-Q. Chen, P. G. LeFloch, Entropy flux-splittings for hyperbolic conservation laws I, General framework, *Comm. Pure Appl. Math.* 48 (1995), no. 7, 691–729.
- [63] G.-Q. Chen, P. G. LeFloch, Entropies and flux-splittings for the isentropic Euler equations, *Chinese Ann. Math. Ser. B* 22 (2001), no. 2, 145–158.
- [64] G.Q. Chen, C.D. Levermore, T.-P. Liu, Hyperbolic conservation laws with stiff relaxation terms and entropy, *Comm. Pure Appl. Math.* 47 (1994), 787-830.
- [65] G.-Q. Chen, M. Rascle, Initial layers and uniqueness of weak entropy solutions to hyperbolic conservation laws, *Arch. Ration. Mech. Anal.* 153 (2000), no. 3, 205–220.
- [66] M. Colombo, On a 2×2 hyperbolic traffic flow model, *Math. Comp. Modelling*, 35 (2002), pp. 683–688.
- [67] C. M. Dafermos. The second law of thermodynamics and stability, *Arch. Rational Mech. Anal.*, 70(2) :167–179, 1979.
- [68] C. M. Dafermos. *Hyperbolic conservation laws in continuum physics*, volume 325 of *Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften [Fundamental Principles of Mathematical Sciences]*. Springer-Verlag, Berlin, 2000.
- [69] C. Daganzo, Requiem for second order fluid approximations of traffic flow, *Transp. Res. B*, 29B (1995), pp. 277–286.

- [70] P. Degond, A. Jüngel, High-field approximations of the energy-transport model for semiconductors with non-parabolic band structure, *Z. Angew. Math. Phys.* 52 (2001), no. 6, 1053–1070.
- [71] D.C. DePackh, *J. Electron. Control*, 13, 417 (1962).
- [72] B. Després, A geometrical approach to nonconservative shocks and elastoplastic shocks, *Arch. Ration. Mech. Anal.* 186 (2007), no. 2, 275–308.
- [73] L. Desvillettes, Entropy dissipation rate and convergence in kinetic equations, *Comm. Math. Phys.* 123 (1989), no. 4, 687–702.
- [74] L. Desvillettes, S. Mischler, About the splitting algorithm for Boltzmann and B.G.K. equations, *Math. Models Methods Appl. Sci.* 6 (1996), no. 8, 1079–1101.
- [75] R. J. DiPerna. Uniqueness of solutions to hyperbolic conservation laws. *Indiana Univ. Math. J.*, 28(1) :137–188, 1979.
- [76] R.J. DiPerna, Convergence of approximate solutions to conservation laws, *Arch. Rational Mech. Anal.* 82 (1983), 27–70.
- [77] R.J. DiPerna, Convergence of the viscosity method for isentropic gas dynamics, *Comm. Math. Phys.* 91 (1983), 1–30.
- [78] R.J. Di Perna, P.-L. Lions, Global weak solutions of kinetic equations, *Rend. Sem. Mat. Univ. Politec. Torino* 46 (1988), no. 3, 259–288 (1990).
- [79] R. Di Perna, P.-L. Lions, Ordinary differential equations, transport theory and Sobolev spaces, *Invent. Math.* 98 (1989), no. 3, 511–547.
- [80] R.J. DiPerna, P.-L. Lions, On the Cauchy problem for Boltzmann equations : global existence and weak stability, *Ann. of Math. (2)* 130 (1989), no. 2, 321–366.
- [81] R.J. Di Perna, P.-L. Lions, Global weak solutions of Vlasov-Maxwell systems, *Comm. Pure Appl. Math.* 42 (1989), no. 6, 729–757.
- [82] R.J. DiPerna, P.-L. Lions, Y. Meyer, L^p regularity of velocity averages, *Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire* 8 (1991), 271–287.
- [83] F. Dubois, P. Le Floch, Boundary conditions for nonlinear hyperbolic systems of conservation laws, *J. Differential Equations* 71 (1988), no. 1, 93–122.
- [84] W. E, Y.G. Rykov, Y.G. Sinai, Generalized variational principles, global weak solutions and behavior with random initial data for systems of conservation laws arising in adhesion particle dynamics, *Comm. Math. Phys.* 177 (1996), 349–380.
- [85] J. L. Estivalezes, P. Villedieu, High-order positivity-preserving kinetic schemes for the compressible Euler equations. *SIAM J. Numer. Anal.* 33 (1996), no. 5, 2050–2067.
- [86] R. Eymard, T. Gallouët, M. Ghilani, R. Herbin, Error estimates for the approximate solutions of a nonlinear hyperbolic equation given by finite volume schemes, *IMA J. Numer. Anal.* 18 (1998), no. 4, 563–594.
- [87] R. Eymard, T. Gallouët, R. Herbin, Finite volume methods, *Handbook of numerical analysis*, Vol. VII, 713–1020, *Handb. Numer. Anal.*, VII, North-Holland, Amsterdam, 2000.
- [88] M.R. Feix, F. Hohl and L.D. Staton, *Nonlinear effects in Plasmas*, Kalman and Feix Editors, Gordon and Breach, pages 3–21 (1969).
- [89] M. Feldman and S.-Y. Ha. Nonlinear functionals of multi-D discrete velocity Boltzmann equations. *J. Statist. Phys.*, 114(3-4) :1015–1033, 2004.

- [90] E. Frénod, E. Sonnendrücker, Long time behavior of the two-dimensional Vlasov equation with a strong external magnetic field, *Math. Models Methods Appl. Sci.* 10 (2000), no. 4, 539–553.
- [91] K.O. Friedrichs, P.D. Lax, Systems of conservation equations with a convex extension, *Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A.* 68, 1686–1688 (1971).
- [92] G. Gagneux, A.M. Lefevère, M. Madaune-Tort, Une approche analytique d’un modèle black-oil des écoulements triphasiques compressibles en ingénierie pétrolière, *Journal de Mécanique Théorique et Appliquée* 6 (1987), 547-569.
- [93] D. C. Gazis, R. Herman, R. Rothery, Nonlinear follow-the-leader models of traffic flow, *Operations Res.*, 9 (1961), p. 545.
- [94] P. Gérard, Microlocal defect measures, *Comm. Partial Differential Equations* 16 (1991), no. 11, 1761–1794.
- [95] P. Gérard, Moyennes de solutions d’équations aux dérivées partielles, *Séminaire sur les équations aux dérivées partielles 1986–1987*, Exp. No. XI, 9 pp., École Polytech., Palaiseau, 1987.
- [96] P. Gérard, F. Golse, Averaging regularity results for PDEs under transversality assumptions, *Comm. Pure Appl. Math.* 45 (1992), no. 1, 1–26.
- [97] Y. Giga and T. Miyakawa. A kinetic construction of global solutions of first order quasilinear equations. *Duke Math. J.*, 50(2) :505–515, 1983.
- [98] E. Godlewski, P.-A. Raviart, Numerical approximation of hyperbolic systems of conservation laws, *Applied Mathematical Sciences*, 118, Springer-Verlag, New York, 1996.
- [99] F. Golse, Quelques résultats de moyennisation pour les équations aux dérivées partielles, *Nonlinear hyperbolic equations in applied sciences*, Rend. Sem. Mat. Univ. Politec. Torino 1988, Special Issue, 101–123 (1989).
- [100] F. Golse, C. D. Levermore, and L. Saint-Raymond. La méthode de l’entropie relative pour les limites hydrodynamiques de modèles cinétiques. In *Séminaire : Équations aux Dérivées Partielles, 1999–2000*, Sémin. Équ. Dériv. Partielles, pages Exp. No. XIX, 23. École Polytech., Palaiseau, 2000.
- [101] F. Golse, P.-L. Lions, B. Perthame, R. Sentis, Regularity of the moments of the solution of a transport equation, *J. Funct. Anal.* 76 (1988), 110-125.
- [102] F. Golse, L. Saint-Raymond, The Navier-Stokes limit of the Boltzmann equation for bounded collision kernels, *Invent. Math.* 155 (2004), no. 1, 81–161.
- [103] F. Golse, L. Saint-Raymond, The Navier-Stokes Limit for the Boltzmann Equation, *C. R. Acad. Sci. Paris. Sér. I Math.* 333 (2001) 897–902.
- [104] F. Golse, L. Saint-Raymond, Velocity averaging in L^1 for the transport equation, *C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I* 334 (2002), 557–562.
- [105] F. Golse, L. Saint-Raymond, The Vlasov-Poisson system with strong magnetic field in quasineutral regim, *Math. Models Methods Appl. Sci.* 13 (2003), no. 5, 661–714.
- [106] J.B. Goodman, Initial boundary value problems for hyperbolic systems of conservation laws, Thesis, Stanford University, 1981.
- [107] L. Gosse and A. E. Tzavaras. Convergence of relaxation schemes to the equations of elastodynamics, *Math. Comp.*, 70(234) :555–577 (electronic), 2001.

- [108] T. Goudon, P.-E. Jabin, and A. Vasseur, Hydrodynamic limit for the Vlasov-Navier-Stokes equations. I & II, *Indiana Univ. Math. J.* 53 (2004), no. 6, 1495–1515, 1517–1536.
- [109] J. M. Greenberg, Extensions and amplifications of a traffic model of Aw and Rascle, *SIAM J. Appl. Math.*, **62** (2001) 729–745.
- [110] E. Grenier, Existence globale pour le système des gaz sans pression, *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.* 321 (1995), no. 2, 171–174.
- [111] E. Grenier, Oscillations in quasineutral plasma, *Comm. Partial Diff. Equations* 21 (1996), no. 3-4, 363–394.
- [112] J. Gressier, P. Villedieu, J.-M. Moschetta, Positivity of flux vector splitting schemes, *J. Comput. Phys.* 155 (1999), no. 1, 199–220.
- [113] B. Gustafsson, H.-O. Kreiss, A. Sundström, Stability theory of difference approximations for mixed initial boundary value problems, II, *Math. Comp.* 26 (1972), 649–686.
- [114] S.-Y. Ha and A. E. Tzavaras. Lyapunov functionals and L^1 -stability for discrete velocity Boltzmann equations. *Comm. Math. Phys.*, 239(1-2) :65–92, 2003.
- [115] A. Harten, P.D. Lax, B. van Leer, On upstream differencing and Godunov-type schemes for hyperbolic conservation laws, *SIAM Rev.* 25 (1983), no. 1, 35–61.
- [116] D. Helbing, Improved fluid-dynamic model for vehicular traffic, *Phys. Rev. E*, **51** (1995) 3164–3169.
- [117] S. Hwang, Kinetic decomposition for kinetic models of BGK type, *J. Differential Equations* 190 (2003), no. 2, 353–363.
- [118] S. Hwang, A.E. Tzavaras, Kinetic decomposition of approximate solutions to conservation laws : application to relaxation and diffusion-dispersion approximations, *Comm. Partial Diff. Eq.* 27 (2002), no. 5-6, 1229–1254.
- [119] R. Illner, A. Klar and M. Materne, Vlasov-Fokker-Planck models for multilane traffic flow, *Com. Math. Sci.*, **1** (2003) 1–12.
- [120] P.-E. Jabin, Macroscopic limit of Vlasov type equations with friction, *Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire* 17 (2000), no. 5, 651–672.
- [121] P.-E. Jabin, B. Perthame, Regularity in kinetic formulations via averaging lemmas, *ESAIM Control Optim. Calc. Var.*, 8, 761-774 (2002).
- [122] S. Jin, Z.-P. Xin, The relaxation schemes for systems of conservation laws in arbitrary space dimensions, *Comm. Pure Appl. Math.* 48 (1995), 235-276.
- [123] B. Jourdain, C. Le Bris, T. Lelièvre, and F. Otto. Long-time asymptotics of a multiscale model for polymeric fluid flows, *Arch. Ration. Mech. Anal.*, 181(1) :97–148, 2006.
- [124] P.T. Kan, M. Santos, Z. Xin, Initial-boundary value problem for conservation laws, *Comm. Math. Phys.* 186 (1997), no. 3, 701–730.
- [125] S. Kawashima. Large-time behavior of solutions of the discrete Boltzmann equation, *Comm. Math. Phys.*, 109(4) :563–589, 1987.
- [126] S. Kaniel. Approximation of the hydrodynamic equations by a transport process. In *Approximation methods for Navier-Stokes problems (Proc. Sympos., Univ. Paderborn, Paderborn, 1979)*, volume 771 of *Lecture Notes in Math.*, pages 272–286. Springer, Berlin, 1980.

- [127] B. S. Kerner, *The physics of traffic*, (Springer, 2004).
- [128] B. Khobalatte, B. Perthame, Maximum principle on the entropy and second-order kinetic schemes, *Math. Comp.* 62 (1994), no. 205, 119–131.
- [129] A. Klar, R. D. Kühne, R. Wegener, Mathematical models for vehicular traffic, *Surveys Math. Ind.*, 6 (1996), pp. 215–239.
- [130] A. Klar, R. Wegener, Enskog-like kinetic models for vehicular traffic, *J. Stat. Phys.*, 1997), pp. 91–114.
- [131] H.-O. Kreiss, Initial boundary value problems for hyperbolic systems, *Comm. Pure Appl. Math.* 23 (1970), 277–298.
- [132] S.N. Kružkov, First order quasilinear equations in several independent variables, *Math. Sb.*, 81 :285-255, 1970 ; *Math. USSR Sb.*, 10 :217–243, 1970.
- [133] C. Lattanzio, D. Serre, Convergence of a relaxation scheme for hyperbolic systems of conservation laws, *Numer. Math.* 88 (2001), no. 1, 121–134.
- [134] C. Lattanzio and A. E. Tzavaras. Structural properties of stress relaxation and convergence from viscoelasticity to polyconvex elastodynamics. *Arch. Ration. Mech. Anal.*, 180(3) :449–492, 2006.
- [135] P.D. Lax, Hyperbolic systems of conservation laws II, *Comm. Pure Appl. Math.*, 10 (1957), 537-566.
- [136] P.D. Lax, Hyperbolic systems of conservation laws and the mathematical theory of shock waves, *Reg. Conf. Series in Appl. Math.*, 13, SIAM, 1973.
- [137] L. Lévi, Problèmes unilatéraux pour des équations non linéaires de convection-réaction, *Ann. Fac. Sci. Toulouse Math.* 4 (1995), 593-631.
- [138] L. Lévi, Obstacle problems for scalar conservation laws, *M2AN Math. Model. Numer. Anal.* 35 (2001), 575-593.
- [139] M. J. Lighthill, J. B. Whitham, On kinematic waves. I : flow movement in long rivers. II : A theory of traffic flow on long crowded roads, *Proc. Roy. Soc.*, A229 (1955), pp. 1749–1766.
- [140] P.-L. Lions. *Mathematical topics in fluid mechanics. Vol. 1*, volume 3 of *Oxford Lecture Series in Mathematics and its Applications*. The Clarendon Press Oxford University Press, New York, 1996. Incompressible models, Oxford Science Publications.
- [141] P.-L. Lions, Régularité optimale des moyennes en vitesses, *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.* 320 (1995), no. 8, 911–915.
- [142] P.-L. Lions, Régularité optimale des moyennes en vitesses, II., *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.* 326 (1998), no. 8, 945–948.
- [143] P.-L. Lions and N. Masmoudi. From the Boltzmann equations to the equations of incompressible fluid mechanics. I, II. *Arch. Ration. Mech. Anal.*, 158(3) :173–193, 195–211, 2001.
- [144] P.-L. Lions, B. Perthame, Lemmes de moments, de moyenne et de dispersion, *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.* 314 (1992), 801-806.
- [145] P.-L. Lions, B. Perthame, P.E. Souganidis, Existence and stability of entropy solutions for the hyperbolic systems of isentropic gas dynamics in Eulerian and Lagrangian coordinates, *Comm. Pure Appl. Math.* 49 (1996), 599-638.

- [146] P.-L. Lions, B. Perthame, E. Tadmor, A kinetic formulation of multidimensional scalar conservation laws and related equations, *J. Amer. Math. Soc.* 7 (1994), 169-191.
- [147] P.-L. Lions, B. Perthame, E. Tadmor, Kinetic formulation of the isentropic gas dynamics and p -systems, *Comm. Math. Phys.* 163 (1994), 415-431.
- [148] T.P. Liu, Initial-boundary value problems for gas dynamics, *Arch. Rational Mech. Anal.* 64 (1977), no. 2, 137-168.
- [149] X.-D. Liu, P.D. Lax, Positive schemes for solving multi-dimensional hyperbolic systems of conservation laws, *Proceedings of the VIII International Conference on Waves and Stability in Continuous Media, Part I (Palermo, 1995)*, *Rend. Circ. Mat. Palermo* (2) Suppl. No. 45, part I (1996), 367-375.
- [150] S.H. Lui, K. Xu, Entropy analysis of kinetic flux vector splitting schemes for the compressible Euler equations, *Z. Angew. Math. Phys.* 52 (2001), no. 1, 62-78.
- [151] J.C. Mandal, S.M. Deshpande, Kinetic flux vector splitting for Euler equations, *Comput. & Fluids* 23 (1994), no. 2, 447-478.
- [152] N. Masmoudi. From Vlasov-Poisson system to the incompressible Euler system. *Comm. Partial Differential Equations*, 26(9-10) :1913-1928, 2001.
- [153] F. Murat, Compacité par compensation : condition nécessaire et suffisante de continuité faible sous une hypothèse de rang constant, *Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci.* (4) 8 (1981), no. 1, 69-102.
- [154] K. Nagel, M. Schreckenberg, A cellular automaton model for freeway traffic, *J. Physique*, 2 (1992), p. 2221.
- [155] R. Natalini, A discrete kinetic approximation of entropy solutions to multidimensional scalar conservation laws, *J. Diff. Eq.* 148 (1998), 292-317.
- [156] R. Natalini, Recent results on hyperbolic relaxation problems. *Analysis of systems of conservation laws (Aachen, 1997)*, 128-198. Chapman & Hall/CRC Monogr. Surv. Pure Appl. Math., 99, Chapman & Hall/CRC, Boca Raton, FL, 1999.
- [157] R. Natalini, A. Terracina, Convergence of a Relaxation Approximation to a Boundary Value Problem for Conservation Laws, *Comm. Partial Differential Equations* 26 (2001), no. 7-8, 1235-1252.
- [158] P. Nelson, A kinetic model of vehicular traffic and its associated bimodal equilibrium solutions, *Transp. Theory Stat. Phys.*, 24 (1995), pp. 383-408.
- [159] J. Nieto, F. Poupaud, J. Soler, High-field limit for the Vlasov-Poisson-Fokker-Planck system, *Arch. Rational Mech. Anal.* 158, no. 1, 2001 pp. 29-59.
- [160] S. Nishibata, The initial-boundary value problems for hyperbolic conservation laws with relaxation, *J. Differential Equations* 130 (1996), no. 1, 100-126.
- [161] T. Nishida, J. Smoller, Mixed problems for nonlinear conservation laws, *J. Differential Equations* 23 (1977), no. 2, 244-269.
- [162] A. Nouri, A. Omrane, J.P. Vila, Boundary conditions for scalar conservation laws from a kinetic point of view, *J. Statist. Phys.* 94 (1999), no. 5-6, 779-804.
- [163] S. Olla, S. R. S. Varadhan, and H.-T. Yau. Hydrodynamical limit for a Hamiltonian system with weak noise. *Comm. Math. Phys.*, 155(3) :523-560, 1993.
- [164] F. Otto, Initial-boundary value problem for a scalar conservation law, *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.* 322 (1996), no. 8, 729-734.

- [165] S. L. Paveri-Fontana, On Boltzmann-like treatments for traffic flow, *Transportation Res.*, 9 (1975), pp. 225–235.
- [166] H. J. Payne, *Models of Freeway Traffic and Control*, Simulation Council, New York, 1971.
- [167] H. J. Payne, FREFLO : A macroscopic simulation model of freeway traffic, *Transportation Research Record*, 722 (1979), pp. 68–75.
- [168] B. Perthame, Global existence to the BGK model of Boltzmann equation, *J. Diff. Eq.* 82 (1989), 191-205.
- [169] B. Perthame, Boltzmann type schemes for gas dynamics and the entropy property, *SIAM J. Numer. Anal.* 27 (1990), no. 6, 1405–1421.
- [170] B. Perthame, Second-order Boltzmann schemes for compressible Euler equations in one and two space dimensions, *SIAM J. Numer. Anal.* 29 (1992), no. 1, 1–19.
- [171] B. Perthame. *Kinetic Formulation of Conservation Laws*. Oxford lecture series in Mathematics and its applications. Oxford University Press, New York, 2002.
- [172] B. Perthame, M. Pulvirenti, Weighted L^∞ bounds and uniqueness for the Boltzmann BGK model, *Arch. Rational Mech. Anal.* 125 (1993), 289-295.
- [173] B. Perthame, C.-W. Shu, On positivity preserving finite volume schemes for Euler equations, *Numer. Math.* 73 (1996), no. 1, 119–130.
- [174] B. Perthame, P.E. Souganidis, A limiting case for velocity averaging, *Ann. Sci. École Norm. Sup.* (4) 31 (1998), 591-598.
- [175] B. Perthame, E. Tadmor, A kinetic equation with kinetic entropy functions for scalar conservation laws, *Comm. Math. Phys.* 136 (1991), 501–517.
- [176] B. Perthame, A.E. Tzavaras, Kinetic formulation for systems of two conservation laws and elastodynamics, *Arch. Ration. Mech. Anal.* 155 (2000), no. 1, 1–48.
- [177] T. Płatkowski and R. Illner. Discrete velocity models of the Boltzmann equation : a survey on the mathematical aspects of the theory, *SIAM Rev.*, 30(2) :213–255, 1988.
- [178] F. Poupaud, Runaway phenomena and fluid approximation under high fields in semiconductor kinetic theory, *Z. Angew. Math. Mech.* 72 (1992), no. 8, 359–372.
- [179] I. Prigogine, A Boltzmann-like approach to the statistical theory of traffic flow, in *Theory of traffic flow*, R. Herman (ed.), 1961, p. 158.
- [180] I. Prigogine, R. Herman, *Kinetic theory of vehicular traffic*, American Elsevier publishing co, New-York, 1971.
- [181] P. I. Richards, Shock waves on the highway, *Oper. Res.*, 4 (1956) 42–51.
- [182] L. Saint-Raymond, From the BGK Boltzmann model to the Navier-Stokes equations, *Ann. Sci. Ecole Norm. Sup.* (4) 36 (2003), no. 2, 271–317.
- [183] L. Saint-Raymond. Convergence of solutions to the Boltzmann equation in the incompressible Euler limit, *Arch. Ration. Mech. Anal.*, 166(1) :47–80, 2003.
- [184] L. Saint-Raymond, Control of large velocities in the two-dimensional gyrokinetic approximation, *J. Math. Pures Appl.* (9) 81 (2002), no. 4, 379–399.
- [185] D. Serre, *Systèmes de lois de conservation I & II*, Fondations, Diderot Editeur, Paris, 1996.

- [186] D. Serre. Relaxation semi-linéaire et cinétique des systèmes de lois de conservation, *Ann. IHP, Anal. non-linéaire*, 17 :169–192, 2000.
- [187] E.M. Stein, Harmonic analysis : real-variable methods, orthogonality, and oscillatory integrals, Princeton Mathematical Series, 43, Monographs in Harmonic Analysis, III. Princeton University Press, Princeton, NJ, 1993.
- [188] L. Tartar, Compensated compactness and applications to partial differential equations, Nonlinear analysis and mechanics : Heriot-Watt Symposium, Vol. IV, pp. 136-212, Res. Notes in Math. 39, Pitman, Boston, Mass.-London, 1979.
- [189] A. E. Tzavaras. Materials with internal variables and relaxation to conservation laws. *Arch. Ration. Mech. Anal.*, 146(2) :129–155, 1999.
- [190] A.E. Tzavaras, Derivation of fluid equations for kinetic models with one conserved quantity, Proceedings of International Conference on Mathematical Analysis, National Technical Univ. of Athens, Greece, 2003.
- [191] A. E. Tzavaras. Relative entropy in hyperbolic relaxation. *Commun. Math. Sci.*, 3(2) :119–132, 2005.
- [192] A. Vasseur, Convergence of a semi-discrete kinetic scheme for the system of isentropic gas dynamics with $\gamma = 3$, *Indiana Univ. Math. J.* 48 (1999), no. 1, 347–364.
- [193] A. Vasseur, Kinetic semidiscretization of scalar conservation laws and convergence by using averaging lemmas, *SIAM J. Numer. Anal.* 36 (1999), no. 2, 465–474.
- [194] A. Vasseur, Strong traces for solutions of multidimensional scalar conservation laws, *Arch. Ration. Mech. Anal.* 160 (2001), no. 3, 181–193.
- [195] P. Villedieu, P.A. Mazet, Schémas cinétiques pour les équations d'Euler hors équilibre thermochimique, *Rech. Aérospat.* 1995, no. 2, 85–102.
- [196] W.-C. Wang, Z. Xin, Asymptotic limit of initial-boundary value problems for conservation laws with relaxational extensions, *Comm. Pure Appl. Math.* 51 (1998), no. 5, 505–535.
- [197] H.-T. Yau. Relative entropy and hydrodynamics of Ginzburg-Landau models. *Lett. Math. Phys.*, 22(1) :63–80, 1991.
- [198] H. M. Zhang, A non-equilibrium traffic model devoid of gas-like behavior, *Transportation Res. B*, 36 (2002), 275–298.