**Espaces de modules de connexions sur $\mathbb{P}^1$ et l'algorithme de Katz**
Séminaire de Géométrie Algébrique de Paris VI-VII et Nantes
Carlos Simpson, Chevaleret, le 1er février 2007

Soit $X$ une courbe projective, par exemple $X = \mathbb{P}^1$, et $D \subset X$ un diviseur réduit, donc $D = p_1 + \ldots + p_n$ avec les $p_i$ distincts. Soit $U := X - D$. On choisit un point de base $u \in U$. Pour $X = \mathbb{P}^1$ le groupe fondamental $\pi_1(U, u)$ est engendré par des lacets $\gamma_1, \ldots, \gamma_n$ partant de $u$ et tournant autour des $p_i$ respectivement. Il y a une relation $\gamma_1 \cdots \gamma_n = 1$. On peut définir l'espace de modules des représentations $M_B(U)$ à valeurs dans un groupe, disons $GL(r, \mathbb{C})$. Dans le cadre des représentations sur les variétés quasiprojectives, il convient de fixer les classes de conjugaison $C_1, \ldots, C_n$ des images des $\gamma_i$. Pour simplifier les choses au maximum, nous allons supposer que les $C_i$ sont des classes de conjugaison des matrices d'ordre fini. En particulier les $C_i \subset GL(r, \mathbb{C})$ sont des fermés de Zariski, d'où affines. L'espace de modules des représentations avec classes de conjugaison donnés peut donc être écrit comme

$$M_B(U; C_1, \ldots, C_n) := \frac{\ker\left(C_1 \times \cdots \times C_n \to SL(r)\right)}{PSL(r)},$$

où l'application est le produit et le quotient est par l'action de conjugaison. Les matrices d'ordre fini ont déterminant 1 et l'action de conjugaison se factorise à travers $PSL(r)$. Ici se présentent evidemment deux choix, soit on prends le quotient catégorique de schémas affines, soit on prends le quotient des champs. On peut considérer l'un ou l'autre.

Ces espaces de modules font apparition même dans le cadre des variétés projectives. En effet, soient $n_i$ les ordres des matrices de $C_i$ et soit $X^{\mathrm{orb}}$ l'orbifold obtenu en mettant des groupes d'ordre $n_i$ aux points $p_i$. Dans ce cas, $M_B(X^{\mathrm{orb}})$ consiste de toutes les représentations de $\pi_1(U, u)$ dont les monodromies autour des $\gamma_i$ sont d'ordre $n_i$ respectivement, et cet espace se divise en composantes connexes qui sont les $M_B(U; C_1, \ldots, C_n)$ pour tous choix des $C_1, \ldots, C_n$ avec $C_i$ d'ordre $n_i$. D'autre part, sauf pour un petit nombre des cas l'orbifold $X^{\mathrm{orb}}$ admet un revetement galoisien $Z$ avec groupe $H$, donc $X^{\mathrm{orb}} = [Z/H]$ est le champ quotient. Le groupe fini $H$ peut toujours agir librement sur une variété simplement connexe $V$ (par exemple une intersection complète $H$-invariant dans un espace projectif avec action de $H$) et $Z \times V/H$ est un bon quotient, projective, avec

$$\pi_1(Z \times V/H) \cong \pi_1(X^{\mathrm{orb}}).$$

D'où $M_B(X^{\mathrm{orb}}) \cong M_B(Z \times V/H)$, et $M_B(U; C_1, \ldots, C_n)$ est reunion de composantes connexes dans l'espace de modules de représentations sur une variété projective (Daskalopolous-Wentworth). En revanche, si les classes de conjugaison $C_i$ ne sont pas d'ordre fini, cette construction ne s'applique pas et les espaces de modules $M_B(U; C_1, \ldots, C_n)$ peuvent être différents.

Les espaces de modules $M_B(U; C_1, \ldots, C_n)$ fournissent des exemples de toutes les structures de la théorie de Hodge nonabélienne: versions Dolbeault et de Rham, action de $\mathbb{C}^*$, filtration de Hodge, connexion de Gauss-Manin (quand $n \geq 4$; ce sont les equations de déformation isomonodromiques, e.g. Painlevé VI), structure hyperkählerienne.

On obtient des morphismes entre espaces de modules, via la construction de correspondence non-linéaire (F. Paugam tente de formaliser cette notion): un diagramme de la forme

$$X \xleftarrow{p} Z \xrightarrow{q} Y$$

donne lieu à un "morphisme" (rationel, du moins)

$$M_B(X,r) \rightarrow M_B(Y,r'), \quad \rho \mapsto R^i q_*(p^*\rho).$$

La construction de Katz en sera un bon exemple. En commençant par les $M_B(U;C_1,\ldots,C_n)$ et en applicant des opérations de ce type, on peut realiser ces variétés (birationnellement au moins) comme composantes des $M_B(Y)$ pour plein de $Y$ différents, et de l'autre coté on ne connait pas d'autre type de composantes irréductibles des $M_B$. Kontsevich conjecture, par exemple, pour les groupes de tresse que les composantes irréductibles de leurs variétés de représentations sont tous obtenues de cette façon, pour une collection naturelle de correspondences.

Il apparait alors important d'étudier les variétés de modules $M_B(U;C_1,\ldots,C_n)$, en plus que pour la simple raison que ce sont les plus faciles à aborder. Le cas $X=\mathbb{P}^1$ est privilegié pour une autre raison: les dimensions des $M_B(U;C_1,\ldots,C_n)$ peuvent rester petites même si $r$ devient grand. La formule pour la dimension obtenue par comptage se trouve être la bonne (si l'on n'oublie pas les $SL$ au lieu des $GL$):

$$\dim M_B(U;C_1,\ldots,C_n) = \sum_{i=1}^{n}\dim(C_i) - 2(r^2-1).$$

Suivant le choix des $C_i$ cette dimension peut être petite. C'est pour cette raison que ces espaces sont intéressants en tant qu'exemples dans la théorie de Hodge nonabélienne.

Il est utile de reécrire cette formule. Une classe de conjugaison $C_i$ semisimple correspond à une partition $r = r_i^1 + \ldots + r_i^{k_i}$. Les matrices de $C_i$ sont diagonalisables avec valeurs propres ayant multiplicités $r_i^j$. On a

$$\dim(C_i) = r^2 - \sum_{j=1}^{k_i}(r_i^j)^2.$$

On voit cela comme le nombre de places restantes dans une matrix $r\times r$ une fois que les blocs $r_i^j \times r_i^j$ sont enlevés. Soit $\nu(C_i) = r_i^1$ le plus grand des blocs. En mettant tous les blocs d'un coté on voit que

$$\dim(C_i) = r^2 - r\nu(C_i) - \sigma(g_i)$$

avec $\sigma(g_i)\geq 0$ et $\sigma(g_i)=0$ si et seulement si $r_i^1 = \cdots = r_i^{k_i}$ (diagramme).

On obtient donc

$$\dim M_B(U;C_1,\ldots,C_n) = 2 + r\delta(C_1,\ldots,C_n) + \sum_{i=1}^{n}\sigma(C_i)$$

où

$$\delta(C_1,\ldots,C_n) := (n-2)r - \sum_{i=1}^{n}\nu(C_i).$$

Donc si $\delta = 0$ et $\sigma = 0$ la dimension est de 2, indépendamment de $r$. Ceci parait etre un cas special très intéressant, isolé en premier par Kostov.

Sinon, la dimension peut croitre linéairement en $r$, alors que pour les courbes $X$ de genre $\geq 1$ la dimension serait quadratique en $r$ (sauf si $g = 1,\ n = 1$).

On en arrive maintenant à l'algorithme de Katz. Dans le livre "Rigid Local Systems", Katz a introduit ce procédé pour l'étude des cas rigides, i.e. quand la dimension de $M_B$ est 0. Kostov a remarqué que l'algorithme donne une information importante dans tous les cas, et Crawley-Boevey a également utilisé une version de l'algorithme dans ses travaux.

Pour énoncer très rapidement ce qui se passe: Katz considère certains correspondences cohomologiques nonlinéaires, qui sont des convolutions additives, pour donner des isomorphismes entre différents $M_B(U; C_1, \ldots, C_n)$. En partant d'une représentation $\rho$ de rang $r$ avec classes de conjugaison $C_1, \ldots, C_n$ il arrive, en choisissant bien la convolution, à une représentation de rang

$$r' = r + \delta(C_1, \ldots, C_n).$$

On voit donc immédiatement comment procéder: si jamais $\delta(C_1, \ldots, C_n) < 0$ on peut appliquer la convolution pour diminuer le rang. On s'arrète forcemment dans une situation avec $\delta \geq 0$, ou peut-etre sinon, $r = 1$—c'est le cas rigide. Si la transformation formelle sur les monodromies locales conduit vers $r' \leq 0$ alors c'est que l'espace de modules en question est vide.

La convolution de Katz se présente comme les correspondences nonlinéaires, sauf qu'on tensorise au milieu. On considere le diagramme

$$U \stackrel{p}{\leftarrow} Z \stackrel{q}{\rightarrow} U$$

où $Z$ est le complémentaire d'un arrangement diagonale standard dans $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ (dessin). On utilise un système local de rang 1 $L$ sur $Z$, et on considère la fonction

$$\rho \mapsto \mathrm{Conv}(\rho, L) := R^1 q_*(L \otimes p^*(\rho)).$$

Dans ce cas, et suivant le choix des monodromies de $L$ autour des droites (ces choix déterminent $L$) la représentation $\mathrm{Conv}(\rho, L)$ aura un sous-espace fixe nontrivial. Divisant par ce sous-espace qui provient des cohomologies locales pour les valeurs propres triviales de $L \otimes p^*(\rho)$, on obtient la *middle convolution*

$$\rho \mapsto \mathrm{MC}(\rho, L)$$

qui peut être vue aussi comme une image directe en cohomologie d'intersection. Le plus souvent on choisira $L$ de façon à augmenter au maximum la multiplicité des valeurs propres triviales locales pour diminuer au maximum le rang; dans ce cas on a

$$r' = \mathrm{rang}\,(\mathrm{MC}(\rho, L)) = r + \delta(C_1, \ldots, C_n).$$

Si les valeurs propres de la monodromie locale de $\rho$ sont des racines d'unité, alors il en sera de même pour $L$, et $L$ devient "motivique". Plus précisemment, il y aura un revêtement ramifié $B \to Z$ de groupe de Galois abélien, et $L$ sera l'un des facteurs de rang 1 de l'image directe sur $Z$. Si on pose $p^B$ et $q^B$ les deux projections composés avec ce revetement, alors $\mathrm{MC}(\rho, L)$ sera facteur directe de $R^1 p^B_*(q^{B,*}\rho)$. Cette construction peut donc être vue comme rentrant dans le cadre des correspondences.

Le problème soulevé ici est le calcul des monodromies locales de $\mathrm{MC}(\rho, L)$ en fonction des monodromies locales de $\rho$ et le choix de $L$. On peut le faire directement sur une présentation par générateurs et relations (Dettweiler-Reiter). En fait, Dettweiler et Reiter utilisent une base dite *de Pockhammer* et obtiennent une formule algébrique directe pour la convolution (ça va plus loin que juste la formule pour les monodromies locales). Dans l'approche de Katz, la convolution se décompose en deux transformations de Fourier, ensuite on connait le calcul des monodromies pour le transformé de Fourier (Deligne, Laumon ...). Pour le cas des équations différentielles céla pose des nouvelles difficultés des connexions irrégulières, c'est pourquoi le livre de Katz est écrit dans le langage $\ell$-adique.

On pourra décrire le transformé de Katz sur les monodromies locales. On représente la monodromie locale en $x_i$ comme un diviseur sur $\mathbb{G}_{\mathrm{m}}$, avec la multiplicité de $\alpha$ notée $m_i(\alpha)$. On fixe $\delta$ déterminé globalement, et $L$ correspond à des choix de $\beta^{H_i}$, $\beta^{V_i}$ et $\beta^{T}$ où $T$ est la diagonale. La transformation locale devient

$$\kappa_i(\beta, \vec{C}) = (m_i((\beta^{H_i})^{-1}) + \delta) \cdot [\beta^{V_i}] + \sum_{\alpha\beta^{H_i} \neq 1} m_i(\alpha)[\alpha\beta^{U_i}].$$

Ici $\beta^{U_i} = \beta^{V_i}\beta^{T}\beta^{H_i}$ est la monodromie de $L$ autour du diviseur exceptionnel obtenu en eclatant l'intersection triple de $H_i$, $V_i$ et $T$. Ce qu'on voit avant tout dans cette formule c'est que la plupart des multiplicités restent les mêmes, seulement la multiplicité la plus grande va diminuer (dans le cas $\delta < 0$). Autrement dit,

$$(r')^1_i = r^1_i + \delta, \quad (r')^j_i = r^j_i \text{ pour } j \geq 2$$

mais ensuite on doit eventuellement reordonner les partitions en ordre décroissant. En revanche, les valeurs propres associés aux parts des partitions sont tous modifiés, forcemment à cause de l'equation $\prod_{i=1}^{n} \det(C_i) = 1$.

L'algorithme de Katz permet de prouver que si les $C_i$ sont d'ordre fini (ou plus généralement quasi-unipotent) alors dans le cas rigide, toute repréprésentation rigide qui existe, est motivique; et l'algorithme marchant dans l'autre sens donne une expression comme motif explicite (quoique, sans doute difficile à manipuler). Roberts a étudié l'algorithme qui en resulte dans le cas rigide, il serait bien d'étendre cet étude aux autres cas. Dettweiler et Reiter ont utilisé céla pour obtenir une expression motivique dans un cas qui est non-rigide dans $SL(r)$ mais rigide dans $G_2$.

Après application plusieurs fois de la convolution de Katz, on est reduit donc à l'étude des espaces de modules dans le cas $\delta \geq 0$.

Le cas $\delta = 0$ parait assez remarquable. On se retrouve dans le cadre des équations de Painlevé, et Boalch developpe toute une théorie autour de ça, qui mérite plus d'approfondissements. C'est Kostov qui avait donné en premier la liste des possibilités pour $\delta = 0$ et $\sigma = 0$. Dans ce cas les multiplicités seront tous multiples d'un entier positif $d$, et il y a 4 séries:

$$(d,d);\ (d,d);\ (d,d);\ (d,d)$$
$$(d,d,d);\ (d,d,d);\ (d,d,d)$$
$$(2d,2d);\ (d,d,d,d);\ (d,d,d,d)$$
$$(3d,3d);\ (2d,2d,2d);\ (d,d,d,d,d,d)$$

Il y a plusieurs petites remarques à faire ici. Le premier cas contient 4 points singuliers, en particulier les points peuvent bouger: c'est la situation du célèbre *equation Painlevé VI* au moins pour $d = 1$, $r = 2$. Les trois autres cas sont avec 3 points, donc pas de monodromie nonabélienne. Cependant, P. Boalch travaille sur ces 4 cas ensemble, avec des interpretations en termes de théorie de Lie, suivant dans un certain sens les idées de Crawley-Boevey.

Pour $d \geq 2$, on note que les espaces de choix possibles pour les valeurs propres, ne sont pas connexes. Par exemple pour la première famille, il faut choisir des valeurs propres $a_i, b_i$ pour $i = 1, 2, 3, 4$. L'équation de déterminant globale est $(a_1b_1a_2b_2a_3b_3a_4b_4)^d = 1$. Si on pose $\mu := a_1b_1a_2b_2a_3b_3a_4b_4$ alors $\mu^d = 1$. L'espace des choix des valeurs propres se décompose donc en $d$ composantes irréductibles (faire attention à ne pas utiliser des arguments du style, déformation des valeurs propres!).

Si $\mu$ est une racine primitive, alors toute représentation ayant ces monodromies locales, est automatiquement irréductible. Donc pour $d \geq 2$ on obtient d'autres espaces de modules, on espère pouvoir les étudier dans le cadre fournie par Boalch aussi. Ces espaces paraissent particulièrement intéressants.

Les cas $\delta > 0$ ou $\delta = 0, \sigma > 0$ sont ceux où les espaces de modules sont de dimension $\geq 4$ (la dimension étant toujours paire car ce sont des espaces hyperkähleriens), et pour l'instant on se contentera de dire qu'ils sont non-vides.

**Théorème 0.1** (Kostov, Crawley-Boevey). *Si $C_1, \ldots, C_n$ sont des classes de conjugaison telles que $\delta > 0$, ou bien $\delta = 0$ et $\sigma > 0$, alors $M_B(U; C_1, \ldots, C_n)$ est non-vide.*

Ce théorème a été prouvé par Kostov et Crawley-Boevey. Nous allons voir une démonstration amusante qui utilise les fibrés de Higgs. Plus particulièrement, on va considérer les *fibrés harmoniques cyclotomiques*, ce sont des fibrés harmoniques munis d'une action de $\mu_r$ compatible avec l'action de $\mu_r \subset \mathbb{C}^*$ sur le champ de Higgs. On rappel que le groupe $\mathbb{C}^*$ agit sur $M_{\mathrm{Dol}}$ via la formule $t : (E, \theta) \mapsto (E, t\theta)$. Les points fixes correspondent aux *variations de structure de Hodge* (VSH). On peut aussi considérer seulement l'action d'un sous-groupe cyclique $\mu_p \subset \mathbb{C}^*$. Les points fixes de ceci ressemblent beaucoup aux VSH à ceci près, que les fibrés de Hodge sont organisés circulairement et l'application de Kodaira-Spencer $\theta$ peut faire le tour du cercle.

Pour le théorème ci-dessus, on va considérer un cas spécial, quand $p = r$ et les dimensions des sous-fibrés sont de 1. Dans ce cas, un fibré harmonique cyclotomique se résume à une série de fibrés en droites

$$L_1 \oplus \cdots \oplus L_r$$

avec $\theta : L_i \to L_{i+1} \otimes \Omega^1_X(\log D)$ et aussi $\theta : L_r \to L_1 \otimes \Omega^1_X(\log D)$. En supposant que les $\theta$ sont tous nontriviales, il n'y a pas de sous-objets $\mu_r$-equivariants et stables par $\theta$, donc l'objet est forcemment stable! Il s'ensuit que le fibré de Higgs sous-jacent, oubliant l'action de $\mu_r$, est au moins polystable.

Dans le cas des représentations sur un ouvert $U \subset X$ il convient d'ajouter la possibilité pour $\theta$ d'avoir des pôles logarithmiques sur $D$. En plus, le *residue* de $\theta$ correspondra à la monodromie locale.

Pour avoir des valeurs propres nontriviales il faut aussi ajouter la notion de *structure parabolique*: les $L_i$ deviennent donc des fibrés paraboliques sur $(X, D)$. On peut écrire un fibré en droites parabolique sur $\mathbb{P}^1$ comme diviseur réel, donc $L_i = \mathcal{O}(\sum \alpha_i^j [x_j])$ avec $\alpha_i^j \in \mathbb{R}$. Pour avoir une monodromie semisimple, on voudrait avoir le residu de $\theta$ s'annuler au sens parabolique. D'autre part, les restes de $\alpha_i^j$ modulo $\mathbb{Z} \subset \mathbb{R}$ sont déterminés par les $C_i$ qu'on veut avoir.

Conceptuellement il est utile à ce stade de l'argument de considérer le cas de monodromie unipotent. Dans ce cas les $L_i$ seront des fibrés en droites usuels, et la forme normale de Jordan de la monodromie unipotente séra déterminé par les ensembles des indices $i$ pour lesquels le residue de $\theta$ est non-nul.

En ces termes on peut donc expliciter ce qu'il veut dire d'avoir un objet avec les classes de conjugaison $C_1, \ldots, C_n$. On voit que $\delta > 0$ est exactement la condition qu'il nous faut pour avoir une solution.

Le nombre d'indices au point $x_j$ où l'on doit avoir un residu non-nul est égal au nombre des termes hors-diagonal dans la forme de Jordan de $C_i$. Ce nombre corréspond á $r - \nu_j$ (la partition pour le cas unipotent est la transposée de celle pour le cas semisimple, et le nombre de lacunes dans la forme de Jordan est égale au nombre des parties, donc á la plus grande multiplicité dans le cas semisimple). La condition pour avoir une solution est que la somme de toutes les différences de degré entre les fibrés, imposés par la condition des residues, soit positive. On a besoin de l'avoir strictement positif si l'on veut fixer le degré total du fibré. La différence entre $deg(L_i)$ et $deg(L_{i+1})$ est $deg(\Omega^1_X) = -2$, plus le nombre des résidues non-nulles, soit

$$-2r + \sum_{j=1}^{n} (r - \nu_j) > 0 \quad \Leftrightarrow (n-2)r - \sum_{j=1}^{n} \nu_j > 0.$$

On reconnait que c'est exactement la condition $\delta > 0$.

Pour le cas des fibrés paraboliques, on peut obtenir la même conclusion en arrangeant les poids suivant les "dents d'une scie".

## Questions, developpements

Plusieurs questions sont naturellement soulevées:

—Dans ces espaces de modules, à quoi ressemblent les lieux des points-fixes pour les actions de $\mathbb{C}^*$, i.e. les sous-espaces de modules des VSH? Quelles sont les nombres de Hodge possibles?

—Obtient-on des isomorphismes entre les différents espaces de modules, ou bien des automorphismes nontriviaux d'un même espace, en applicant plusieurs convolutions de Katz en boucle? Les techniques de Crawley-Boevey, et l'associativité de la convolution, suggèrent que non; il faut cependent vérifier les details.

—Prouver que les isomorphismes de Katz preservent les structures de Hodge nonabéliennes.

—Décrire plus explicitement les espaces de modules de petite dimension avec leurs structures (Boalch).