

Contents

1	Introduction	2
2	Représentations du groupe symétrique et fonctions symétriques	2
2.1	Outils combinatoires	2
2.2	Représentations du groupe symétrique	3
2.2.1	Généralités sur les groupes finis	3
2.2.2	Restriction et induction	4
2.2.3	Caractères	5
2.3	Fonctions symétriques	7
2.3.1	Fonctions symétriques	7
2.3.2	Fonctions de Schur	8
2.3.3	Structure des fonctions symétriques	9
2.3.4	Formule de Pieri	10
3	Stabilité des représentations	12
3.1	Suites de représentations	12
3.2	Théorème de Hemmer	12
3.3	Exemple des cohomologies des espaces de configurations	13
4	FI-modules	15
4.1	Première approche	15
4.2	FI-modules libres	15
4.2.1	Définition et exemples	15
4.2.2	FI-modules de type fini	17
5	Stabilité des FI-modules et des représentations	17
5.1	Stabilité des FI-modules	17
5.2	Poids et rang de stabilité en caractéristique 0	19
5.3	Stabilité des représentations et FI-module de type fini	20
5.4	Retour sur la cohomologie des espaces de configurations	20

1 Introduction

Des suites de représentations de groupes apparaissent dans divers domaines : en topologie, combinatoire, géométrie algébrique par exemple. Church et Farb ont remarqué que pour certains groupes dont les représentations se décomposent bien en représentations irréductibles, certaines de ces suites présentent une forme de stabilité dans leurs décompositions. Ils ont défini dans [5] un cadre pour parler de ces suites et du sens à donner à la stabilité observée, et introduit les FI-modules comme outil d'étude. Le principal résultat donne l'équivalence entre la propriété pour ces modules d'être de type fini, et la stabilité de la suite de représentations associée.

Plus précisément le présent travail s'intéresse au cas des groupes symétriques. Une représentation de S_n se décompose en somme d'irréductibles caractérisés par des partitions de n . Le sens de la stabilité observée se traduit sur les diagrammes associés à ces partitions : le motif sous la première ligne est constant. La notion d'induction d'une représentation d'un sous-groupe en une représentation du groupe ambiant s'exprime d'une façon simple lorsqu'on cherche à induire à partir d'une représentation irréductible grâce à la formule de Pieri. Dès lors quand une suite de représentations s'exprime sous la forme d'une induction, le théorème de Hemmer donne un résultat de stabilité, illustré par le cas des cohomologies des espaces de configuration. On retrouve aussi des expressions sous forme d'induction dans les constructions autour des FI-modules : en particulier le cas essentiel des FI-modules libres est une somme de représentations induites et la formule de Pieri permet d'obtenir des résultats.

2 Représentations du groupe symétrique et fonctions symétriques

2.1 Outils combinatoires

Définition 2.1. Une partition λ est une suite décroissante d'entiers positifs $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots$ dont un nombre fini sont non nuls. Les λ_i non nuls sont les parts de λ , le nombre de parts $l(\lambda)$ est la longueur de la partition, le poids de la partition est la somme de ses parts. Quand $n = \lambda_1 + \dots + \lambda_l$, on dit que λ est une partition de l'entier n et on note $\lambda \vdash n$.

Exemple. $\lambda = (5, 3, 2)$

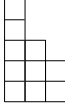
Remarque 2.2. Comme évoqué dans l'introduction on s'intéressera à une stabilité au sens où seule la première ligne est susceptible de varier. On adopte une notation qui reflète cela : soit $(\lambda_1, \dots, \lambda_l) \vdash k$ une partition de l'entier k , pour $n \geq k + \lambda_1$ on note alors la partition de n

$$\lambda|n = (n - k, \lambda_1, \dots, \lambda_l)$$

Définition 2.3. On peut voir une partition comme une partie de \mathbb{Z}^2 , appelée

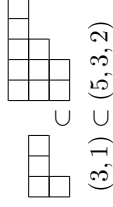
diagramme de λ en considérant l'ensemble des points (i, j) tels que $1 \leq i \leq \lambda_j$. On représente alors dans le plan chaque point du diagramme par un carré.

Exemple. Le diagramme de $\lambda = (5, 3, 2)$ est

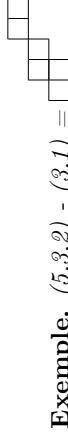


Définition 2.4. On considère la relation \subset entre deux partitions $\mu \subset \lambda$ lorsque pour tout i $\mu_i \leq \lambda_i$.

Exemple.



Définition 2.5. À partir de deux partitions $\mu \subset \lambda$, on considère le diagramme gauche $\lambda - \mu$ qui est la différence ensembliste des deux diagrammes.



Exemple. $(5, 3, 2) - (3, 1)$ est une bande horizontale s'il a au plus une case dans chaque colonne.

Définition 2.6. Un diagramme gauche λ est une bande horizontale s'il a au plus une case dans chaque colonne.

Définition 2.7. Un tableau T est un diagramme dont on a rempli les cases par les éléments d'un ensemble ordonné. T est semi-standard s'il est tel que les lignes sont croissantes de gauche à droite et les colonnes strictement croissantes de haut en bas. On dit que T est de forme λ lorsque T est un diagramme de λ . On note $T \models \lambda$ lorsque T est un tableau de forme λ .

Le contenu d'un tableau T est la suite $(c_i)_{i \in \mathbb{N}}$ où c_i est le nombre de i que contient T .

Exemple. Le tableau semi-standard $\begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 1 & 2 \\ \hline 2 & 3 & \\ \hline 5 & & \\ \hline \end{array}$ a pour contenu $(2, 2, 1, 0, 1)$.

2.2 Représentations du groupe symétrique

2.2.1 Généralités sur les groupes finis

Quelques résultats sur les représentations de groupes finis sont rappelés, on pourra se référer à [3] ou au début de [2] pour plus de détails.

Définition 2.8. Une représentation d'un groupe G est un module V muni d'un morphisme de groupes $\rho : G \rightarrow GL(V)$. Ou encore, V est muni d'une action $\rho : G \times V \rightarrow V$ vérifiant :

$$\begin{aligned} gv &\in V & gv, h \in G, v, w \in V \\ g(cv + dw) &= c(gv) + d(gw) & c, d \in \mathbb{C} \\ (gh)v &= g(hv) \\ 1_G v &= v \end{aligned}$$

Lorsque V est de dimension finie, une représentation de G peut se voir en terme de matrices.

Définition 2.9. Soit V une représentation d'un groupe G . Une sous-représentation W de V est un sous-module stable sous l'action de G , i.e. $\forall w \in W \forall g \in G, gw \in W$.

Définition 2.10. Une représentation V de G est dite réductible si elle admet des sous-représentations non triviales (différentes de V ou de la représentation triviale). Dans le cas contraire, la représentation V est dite irréductible.

Définition 2.11. Deux sous-modules U, W de V sont supplémentaires si tout $v \in V$ s'écrit de façon unique sous la forme d'une somme $v = u + w$, pour un $(u, w) \in U \times W$.

Proposition 2.12. Soit V une représentation de G, W une sous-représentation et B une forme bilinéaire invariante sous l'action de G , alors l'orthogonal W^\perp est une sous-représentation.

Théorème 2.13 (Théorème de Maschke). Soit V une représentation non nulle d'un groupe fini G . Alors V se décompose en une somme directe de représentations irréductibles.

Théorème 2.14 (Représentations du groupe symétrique). Les représentations irréductibles du groupe symétrique S_n sont en bijection avec les partitions de l'entier n . On note V_λ la représentation correspondant à la partition $\lambda \vdash n$.

Remarque 2.15. Pour $\lambda \vdash m$ et $n \geq \lambda_1 + m$, on pose $V(\lambda)_n := V_{\lambda \sqcup [m]}$.

2.2.2 Restriction et induction

Définition 2.16. Soit (V, ρ) une représentation d'un groupe G , et H un sous-groupe de G . La représentation V restreinte à H consiste simplement à ne considérer que l'action des éléments de H .

$$\text{res}_H^G \rho = \rho|_H : h \in H \mapsto \rho(h)$$

Définition 2.17. Soit V une représentation d'un groupe H sous-groupe d'un groupe G . La représentation induite est construite sur le fait que les classes suivant le sous-groupe H constituent une partition du groupe $G = t_1 H \sqcup t_2 H \sqcup$

$\dots \sqcup t_p H$. On cherche alors à faire agir $g \in G$ d'abord sur les classes pour translater son action vers H avant de le faire agir sur V .

Considérons l'espace $W = \bigoplus_{i=1}^p t_i V$. Un élément $g \in G$ agit sur les classes comme par $gt_i = t_{g(i)} h_i$. Le groupe G agit alors sur W par

$$g \sum t_i \psi_i = \sum t_{g(i)} h_i \psi_i$$

Exemple. La représentation triviale d'un groupe G associe à tout élément $g \in G$ la matrice (1).

L'action d'un groupe G sur un ensemble S s'étend en une représentation de G en considérant le module engendré par S et l'action de G sur les vecteurs de base, cela définit la représentation par permutations associée à S .

La représentation régulière d'un groupe G est la représentation par permutations associée à G pour son action sur lui-même par sa loi interne.

2.2.3 Caractères

Définition 2.18. Soit V une représentation de groupes. Chaque g peut se voir comme la matrice d'un automorphisme de V . Le caractère de la représentation est la fonction définie sur G comme la trace de la matrice correspondant à g :

$$\chi(g) = \text{tr } g$$

C'est un morphisme de groupes $G \rightarrow \mathbb{C}$.

On note en particulier χ_λ le caractère de la représentation de S_n V_λ .

Remarque 2.19. Les caractères d'un groupe G sont des fonctions centrales, i.e. pour $g, h \in G$, $\chi(gh) = \chi(hg)$.

Exemple. • Si V est la représentation triviale, alors $\chi(g) = 1$ pour tout g .

- Si V est la représentation régulière, alors $\chi(1_G) = \text{card } G$ et $\chi(g) = 0$ pour $g \neq 1_G$.

Définition 2.20. Un produit scalaire sur les fonctions définies sur G et à valeurs dans \mathbb{C} est donné par

$$\langle \chi, \psi \rangle = \frac{1}{\text{card } G} \sum_{g \in G} \chi(g) \overline{\psi(g)}$$

Remarque 2.21. En particulier si ϕ et ψ sont des caractères, $\langle \chi, \psi \rangle = \frac{1}{\text{card } G} \sum_{g \in G} \chi(g) \psi(g^{-1})$.

Théorème 2.22. Les caractères irréductibles du groupe G forment une base orthonormée de l'espace des fonctions centrales sur G . Si ϕ et ψ sont des caractères irréductibles de G , alors

$$\langle \phi, \psi \rangle = \delta_{\phi, \psi}$$

Théorème 2.23 (Réciprocité de Frobenius). Soit H un sous-groupe de G et ψ et χ des caractères de H et G respectivement, alors

$$\langle \text{ind}_H^G \psi, \chi \rangle = \langle \psi, \text{res}_H^G \phi \rangle$$

Définition 2.24. Si deux permutations $\sigma \in S_n$ et $\tau \in S_m$ sont données, ont définit la permutation $\sigma \times \tau \in S_{n+m}$ par :

$$\begin{aligned} \sigma \times \tau(i) &= \sigma(i) & \text{pour } 1 \leq i \leq n \\ \sigma \times \tau(n+j) &= n + \tau(j) & \text{pour } 1 \leq j \leq m \end{aligned}$$

On identifie $S_n \times S_m$ avec l'image de $(\sigma, \tau) \mapsto \sigma \times \tau$ sous-groupe de S_{n+m} .

Remarque 2.25. On considère S_n comme un sous-groupe de S_{n+m} par l'image de $(\sigma, 1) \mapsto \sigma \times 1$

Définition 2.26. Notons R^n l'espace des fonctions centrales sur S_n , i.e. l'espace vectoriel engendré par les caractères irréductibles de S_n . L'espace $R^n \otimes R^m$ s'identifie avec le sous espace de S_{n+m} des fonctions centrales sur $S_n \times S_m$. Cela donne lieu à une application de restriction

$$\begin{aligned} \Delta_{n,m} : R^{n+m} &\longrightarrow R^n \otimes R^m \\ f &\longmapsto f|_{S_n \times S_m} \end{aligned}$$

on considère ensuite $\Delta_p = \bigoplus_{n+m=p} \Delta_{n,m} : R^n \rightarrow \bigoplus_{n+m=p} R^n \otimes R^m$. On obtient un coproduit $\Delta = \bigoplus_p \Delta_p$ sur l'espace $R := \bigoplus_{p \geq 0} R^p$, de comuité $\epsilon : R \rightarrow \mathbb{C}$, $\epsilon(1) = 1$, $\epsilon R^n = 0$ si $n > 0$.

Considérer la restriction $\chi|_H$ d'un caractère d'une représentation d'un groupe G , c'est exactement prendre le caractère de la représentation de G restreinte à H . On reprend la notation : $\text{res}_H^G \chi$. Dès lors par la réciprocity de Frobenius, l'induction donne un adjoint aux applications $\Delta_{n,m} = \text{res}_{S_n \times S_m}^{S_{n+m}}$.

Définition 2.27. Les applications $m_{n,m} := \text{ind}_{S_n \times S_m}^{S_{n+m}} : R^n \otimes R^m \rightarrow R^{n+m}$ permettent de définir un produit $m : R \otimes R \rightarrow R$ d'unité $1 \in R^0$.

Proposition 2.28. Muni de ce produit et de ce coproduit, R est une algèbre de Hopf commutative et cocommutative.

En particulier (voir [1]), le théorème de Milnor-Moore assure que R est une algèbre polynomiale engendrée par une famille de générateurs primitifs. Deux familles génératrices de R sont données par les caractères de la représentation triviale sur S_n , $\chi(n) : \sigma \mapsto 1$ et les caractères de la représentation signature de S_n , $\chi(1^n)$. La famille donnée par

$$\psi_n = \chi(1)\psi_{n-1} - \chi(1^2)\psi_{n-2} + \chi(1^3)\psi_{n-3} - \dots + (-1)^n \chi(1^n) \chi_{(1^{n-1})} \psi_1 + n(-1)^{n-1} \chi_{(1^n)}$$

est une famille de générateurs primitif, i.e. en notant avec la fonction génératrice $\psi(t) = \sum_{n \geq 1} \psi_n t^n$, on a $\Delta(\psi(t)) = \psi(t) \otimes 1 + 1 \otimes \psi(t)$.

Considérons un espace vectoriel V de dimension n , [1] donne un morphisme d'algèbres de R vers les fonctions centrales polynomiales sur $GL(V)$. En s'intéressant à la matrice de diagonale les inconnues x_1, \dots, x_n , on obtient en appliquant ces fonctions in isomorphisme de l'anneau des fonctions polynomiales centrales de $End(V)$ vers les polynômes symétriques en x_1, \dots, x_n . En particulier $\chi_{(1^n)}$ correspond au polynôme symétrique élémentaire e_n , $\chi_{(n)}$ correspond au monôme symétrique complet h_n et ψ_n correspond à la somme des puissances p_n .

On souhaite s'affranchir de l'espace V introduit ici et de sa dimension. On s'intéresse pour cela aux fonctions symétriques.

2.3 Fonctions symétriques

2.3.1 Fonctions symétriques

Définition 2.29. *Considérons un ensemble ordonné de variables $x = \{x_1 \leq x_2 \leq \dots\}$. Une permutation σ du groupe symétrique S_n agit sur une série $f(x) \in C[[x]]$ en permutant les indices des variables :*

$$\sigma f(x_1, x_2, \dots, x_n, x_{n+1}, \dots) = f(x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}, \dots, x_{\sigma(n)}, x_{n+1})$$

Un monôme $x_{i_1}^{\lambda_1} \dots x_{i_l}^{\lambda_l}$ est de degré n si $n = \sum_i \lambda_i$. Une série $f \in C[[x]]$ est homogène de degré n si tous les monômes composant $f(x)$ sont de degré n .

Définition 2.30. *Pour une partition $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_l)$ de n donnée, on considère la fonction monôme symétrique*

$$m_\lambda = m_\lambda(x) = \sum_{i_1, \dots, i_l \in (\mathbb{N}^*)^l} x_{i_1}^{\lambda_1} \dots x_{i_l}^{\lambda_l}$$

$m_\lambda(x)$ est homogène de degré n et invariante sous l'action des groupes symétriques.

Définition 2.31. *L'anneau des Λ fonctions symétriques est l'espace vectoriel engendré par les fonctions monômes symétriques.*

Λ a de plus une structure d'anneau gradué donnée par le produit : notons Λ^n l'espace engendré par les m_λ de degré n , $\Lambda = \bigoplus_{n \geq 0} \Lambda^n$. Si $f \in \Lambda^p$ et $g \in \Lambda^q$, alors fg est homogène de degré $p + q$, i.e. dans Λ^{p+q} .

Pour n un entier ou λ une partition, on définit quelques fonctions symétriques notables :

Définition 2.32 (fonctions symétriques élémentaires).

$$e_n = \sum_{i_1 < i_2 < \dots < i_n} x_{i_1} x_{i_2} \dots x_{i_n} = m_{(1^n)}$$

$$e_\lambda = e_{\lambda_1} e_{\lambda_2} \dots$$

Définition 2.33 (fonctions symétriques homogènes).

$$h_n := \sum_{\lambda \vdash n} m_\lambda$$

$$h_\lambda = h_{\lambda_1} h_{\lambda_2} \dots$$

Définition 2.34 (fonctions symétriques sommes de puissances).

$$p_n := m_{(n)} = \sum_{i \geq 1} x_i^n$$

$$p_\lambda = p_{\lambda_1} p_{\lambda_2} \dots$$

Proposition 2.35. *Indexées par les partitions de l'entier n , les familles h_λ et e_λ forment une base sur \mathbb{Z} de Λ^n et p_λ forme une base sur \mathbb{Q} de Λ^n .*

2.3.2 Fonctions de Schur

Définition 2.36. *Soit T un tableau de forme λ , on note $x_{i,j}$ la variable correspondant au point en ligne i et colonne j dans le diagramme. Le monôme associé est*

$$x^T = \prod_{(i,j) \in T} x_{i,j}$$

$$Si T = \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 1 & 2 \\ \hline 2 & 3 & \\ \hline \end{array}, \text{ alors } x^T = x_1^2 x_2^2 x_3.$$

Définition 2.37. *Soit λ une partition, la fonction de Schur correspondante est la fonction génératrice des tableaux semi-standards de forme λ :*

$$s_\lambda(x) = \sum_T x^T$$

Proposition 2.38. *La fonction $s_\lambda(x)$ est bien symétrique.*

Preuve. Pour montrer que ces fonctions sont symétriques, il suffit d'étudier leur comportement sous l'action des transpositions $(i, i+1)$. Pour cela, transférons aux tableaux l'action de $(i, i+1)$ sur les variables. $(i, i+1)(x_i^{\lambda_i} x_{i+1}^{\lambda_{i+1}} = x_i^{\lambda_i+1} x_{i+1}^{\lambda_i}$: échanger les variables x_i et x_{i+1} revient à intervertir leurs exposants, i.e. le nombre de fois que i et $i+1$ apparaissent dans le tableau.

Soit T un tableau semi-standard, chaque colonne contient soit une paire $(i, i+1)$, soit seulement l'un des deux, soit aucun. Les i ou $i+1$ apparaissant dans une paire sont dits /liées/, les autres occurrences sont dites /libres/. Dans chaque ligne maintenant, échanger le nombre de i et de $i+1$ libres.

Exemple.

$$T = \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline 1 & 1 & 1 & 2 & 2 & 2 & 2 & 3 & 3 \\ \hline 2 & 2 & 2 & 3 & 3 & & & & \\ \hline 3 & & & & & & & & \\ \hline \end{array}$$

$$(2,3)T = \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline 1 & 1 & 1 & 2 & 2 & 2 & 3 & 3 & 3 \\ \hline 2 & 3 & 3 & 3 & 3 & & & & \\ \hline 3 & & & & & & & & \\ \hline \end{array}$$

Modifier les occurrences libres uniquement préserve la croissance stricte des colonnes et i et $i+1$ ayant des rôles symétriques la définition des occurrences liées, échanger à nouveau le nombre d'occurrences libres redonne le tableau initial.

Cela définit donc une involution sur les tableaux semi-standards. Puisque pour définir la fonction de Schur s_λ , la somme est prise sur tous les tableaux semi-standards de forme λ , l'involution laisse s_λ invariant. \square

Définition 2.39 (Nombres de Kostka). On note $K_{\lambda,\nu}$ le nombre de tableaux de forme λ et de contenu ν .

Remarque 2.40. Les fonctions de Schur s'expriment en fonction des monômes symétriques par les nombres de Kostka :

$$s_\lambda = \sum_{\mu} K_{\lambda,\mu} m_\mu$$

Les fonctions de Schur pour les partitions de n constituent une base pour Λ^n .

Remarque 2.41.

$$s_{(r)} = h_r$$

$$s_{(1^r)} = e_r$$

Définition 2.42. Considérons des tableaux semi-standards sur l'alphabet $\{x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq y_1 \leq y_2 \leq \dots\}$ et la fonction de Schur $s_\lambda(x, y)$.

Chaque tableau semi-standard se décompose en un tableau sur (x_i) de forme $\mu \subset \lambda$ et un tableau gauche sur (y_i) de forme $\lambda - \mu : (x, y)^T = x^{T_\mu} y^{T_{\lambda-\mu}}$. Dès lors, en factorisant par la partie sur (x_i) d'un tableau, on obtient $\sum_{\mu \subset \lambda} \sum_{T^\mu} x^T \sum_{T^{\lambda-\mu}} y^{T'}$. Les fonctions de Schur gauches $s_{\lambda/\mu}$ sont définies comme étant les fonctions génératrices associées aux tableaux gauches apparaissant dans cette décomposition :

$$s_\lambda(x, y) = \sum_{\mu \subset \lambda} s_\mu(x) s_{\lambda/\mu}(y)$$

Proposition 2.43 (Formule de Cauchy).

$$\sum_{\lambda} s_\lambda(x) s_\lambda(y) = \prod_{i,j \geq 1} \frac{1}{1 - x_i y_j}$$

2.3.3 Structure des fonctions symétriques

Définition 2.44. On définit un produit scalaire sur Λ tel que $\langle h_\lambda, m_\mu \rangle = \delta_\mu^\lambda$.

Théorème 2.45. Les fonctions de Schur constituent une base orthonormée de Λ pour ce produit scalaire : $\langle s_\lambda, s_\mu \rangle = \delta_\mu^\lambda$

Théorème 2.46. L'application $ch : R^n \rightarrow \Lambda^n$ par $ch(\chi_\lambda) := s_\lambda$ définit un isomorphisme isométrique de $R = \bigoplus_n R^n$ dans Λ .

Remarque 2.47. ch respecte la structure de Hopf mentionnée sur les caractères, le produit tensoriel s'interprétant par la multiplication de fonctions symétriques. En particulier si on considère les variables $x_1 \leq \dots \leq y_1 \leq \dots$, on exprime quelques coproduits :

$$\Delta(e_n(x, y)) = \sum_{p+q=n} e_p(x) e_q(y)$$

$$\Delta(h_n(x, y)) = \sum_{p+q=n} h_p(x) h_q(y)$$

$$\Delta(p_n(x, y)) = p_n(x) + p_n(y)$$

2.3.4 Formule de Pieri

Proposition 2.48.

$$\langle s_{\lambda/\mu}, s_\nu \rangle = \langle s_\lambda, s_\mu s_\nu \rangle$$

Preuve. Notons $c_{\mu\nu}^\lambda$ les coordonnées du produit de deux fonctions de Schur $s_\mu s_\nu$ dans la base des fonctions de Schur. On montre que

$$s_{\lambda/\mu} = \sum_{\nu} c_{\mu\nu}^\lambda s_\nu$$

Considérons un troisième ensemble de variables $z = \{z_1, z_2, \dots\}$ Par définition des fonctions de Schur gauches

$$\sum_{\lambda, \mu} s_\mu(x) s_{\lambda/\mu}(y) s_\lambda(z) = \sum_{\lambda} s_\lambda(x, y) s_\lambda(z)$$

appliquons ensuite la formule de Cauchy au terme de droite

$$\sum_{\lambda, \mu} s_\mu(x) s_{\lambda/\mu}(y) s_\lambda(z) = \prod_{i,j} \frac{1}{1 - x_i z_j} \frac{1}{1 - y_i z_j}$$

Puis une nouvelle fois aux deux facteurs à droite

$$= \left(\sum_{\mu} s_\mu(x) s_\mu(z) \right) \left(\sum_{\nu} s_\nu(y) s_\nu(z) \right)$$

$$= \sum_{\mu, \nu} s_\mu(x) s_\nu(y) s_\mu(z) s_\nu(z)$$

Dès lors en prenant les coefficients de $s_\mu(x)$

$$\sum_{\lambda} s_{\lambda/\mu}(y) s_\lambda(z) = \sum_{\nu} s_\nu(y) s_\mu(z) s_\nu(z)$$

puis en réexprimant le produit $s_\mu(z) s_\nu(z)$ avec les coefficients introduits

$$\sum_{\lambda} s_{\lambda/\mu}(y) s_\lambda(z) = \sum_{\lambda} \left(\sum_{\nu} s_\nu(y) c_{\mu\nu}^\lambda \right) s_\lambda(z)$$

Le résultat apparaît dans les coefficients des termes $s_\lambda(z)$. \square

Théorème 2.49 (Formule de Pieri). *Soient λ une partition et k un entier, alors*

$$s_\mu h_k = \sum_{\lambda} s_\lambda$$

avec la somme sur les λ tels que $\lambda - \mu$ est une bande horizontale.

Preuve. Réécrivons la fonction de Schur gauche $s_{\lambda/\mu}$ avec les monômes symétriques :

$$s_{\lambda/\mu} = \sum_{T \models \lambda - \mu} x^T = \sum_{\nu} K_{\lambda - \mu, \nu} m_\nu$$

Via le produit scalaire et la dualité des bases h_λ et μ_λ , $\langle h_\lambda, m_\mu \rangle = \delta_\mu^\lambda$:

$$K_{\lambda - \mu, \nu} = \langle s_{\lambda/\mu}, h_\nu \rangle = \langle s_\lambda, s_\mu h_\nu \rangle$$

Dès lors

$$s_\mu h_\nu = \sum_{\lambda} K_{\lambda - \mu, \nu} s_\lambda$$

Intéressons nous en particulier au cas où $\nu = (k)$, i.e. h_r la fonction symétrique correspondant à η_k la représentation triviale de S_k . Alors $s_\lambda h_{(k)}$ est la fonction symétrique correspondant au caractère $\text{ind}_{S_n \times S_r}^{S_{n+k}} \chi_\lambda \times \eta_k$.

Un tableau de forme $\lambda - \mu$ et de poids (k) ne contient que des 1, la contrainte de croissance stricte sur les colonnes assure que $K_{\lambda - \mu, \nu}$ est non nul seulement lorsque $\lambda - \mu$ ne présente pas plusieurs cases dans une même colonne. De plus $K_{\lambda - \mu, (k)} = 1$ lorsque non nul car il n'y a qu'une façon d'arranger le contenu composé de 1 uniquement.

Dès lors la somme se réduit à :

$$s_\mu h_{(k)} = \sum_{\lambda} s_\lambda$$

pour λ tel que $\lambda - \mu$ est une bande horizontale, i.e. λ s'obtient en ajoutant k cases dans k colonnes distinctes de μ de façon à former un diagramme. \square

Soit $\lambda \vdash n$ une partition et V_λ la représentation irréductible de S_n correspondante, sur \mathbb{Q} . Alors via la l'isomorphisme entre les fonctions symétriques et les caractères,

- en tant que représentation de S_{n+k}

$$\text{ind}_{S_n \times S_k}^{S_{n+k}} V_\lambda \simeq \bigoplus_{\mu} V_\mu$$

où $\mu \vdash n+k$ parcourt les partitions obtenues à partir de λ en ajoutant k cases dans k colonnes différentes.

- en tant que représentation de S_{n-k}

$$\left(\text{rés}_{S_{n-k} \times S_k}^{S_n} V_\lambda \right)_{S_k} \simeq \bigoplus_{\nu} V_\nu$$

où $\nu \vdash n-k$ parcourt les partitions obtenues à partir de λ en retirant k cases dans k colonnes différentes.

3 Stabilité des représentations

3.1 Suites de représentations

On considère des suites $V_1 \rightarrow V_2 \rightarrow V_3 \rightarrow \dots$ de représentations des groupes S_1, S_2, \dots reliées par des applications linéaires compatibles avec les actions des groupes symétriques.

Définition 3.1. Une suite consistante de représentations des groupes symétriques est la donnée de représentations $(V_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de S_n , $n \in \mathbb{N}$ munies d'applications linéaires $\phi_n : V_n \rightarrow V_{n+1}$ compatibles avec les actions de S_n et S_{n+1} en étendant $\sigma \in S_n$ en un élément de S_{n+1} par $\sigma(n+1) = n+1$, i.e. le diagramme suivant commute,

$$\begin{array}{ccc} V_n & \xrightarrow{\phi_n} & V_{n+1} \\ \downarrow \sigma & & \downarrow \sigma \\ V_n & \xrightarrow{\phi_n} & V_{n+1} \end{array}$$

Définition 3.2. Une suite consistante $\{V_n, \phi_n\}$ de représentations des groupes symétriques est uniformément stable, avec un rang de stabilité $n \geq N$ si :

- injectivité : les applications ϕ_n sont injectives pour $n \geq N$
- surjectivité : V_{n+1} est engendré par les orbites sous l'action de S_{n+1} de l'image $\phi_n(V_n)$ pour $n \geq N$
- stabilité des coefficients : les coefficients $c_{\lambda, n}$ de la décomposition de V_n en irréductibles $V_n = \bigoplus_{\lambda} c_{\lambda, n} V(\lambda)_n$ sont constants pour $n \geq N$

3.2 Théorème de Hemmer

Lemme 3.3. Soient $\mu \vdash n \leq k$, $\lambda \vdash n+k$ des partitions et $\lambda^+ := (\lambda_1 + 1, \lambda_2, \dots, \lambda_l)$, alors $K_{\lambda^+ - \mu, (k+1)} = K_{\lambda - \mu, (k)}$.

Preuve. $K_{\theta - \mu, (k+1)} = 1$ quand θ est obtenu à partir de μ en ajoutant $k+1$ cases dans des colonnes distinctes. Or $\mu_1 \leq n \leq k$, donc en ajoutant $k+1$ cases dans des colonnes distinctes, une case est nécessairement ajoutée à la première ligne. Retirer la dernière case de la première ligne donne alors une bijection entre les diagrammes de forme $\lambda^+ - \mu$ et contenu $(k+1)$ et ceux de forme $\lambda^+ - \mu$ et contenu (k) . \square

Théorème 3.4. Soit $k \geq 1$, H un sous-groupe de S_k et V une représentation de H . Si $\text{ind}_{H \times S_{n-k}}^{S_n} V = \sum_{\lambda \vdash n} c_\lambda s_\lambda$, alors $\text{ind}_{H \times S_{n-k+1}}^{S_{n+1}} V = \sum_{\lambda \vdash n} c_\lambda s_{\lambda^+}$

Preuve.

$$\text{ind}_{H \times S_{n-k}}^{S_n} (H) = \text{ind}_{S_k \times S_{n-k}}^{S_n} \left(\text{ind}_{H \times S_{n-k}}^{S_k} H \right) = \text{ind}_{S_k \times S_{n-k}}^{S_n} \left(\text{ind}_H^{S_k} H \right)$$

Dès lors, le lemme s'applique aux composantes irréductibles de $\text{ind}_H^{S_k} H$. \square

[Théorème de Hemmer] La suite de représentations de S_n ($\text{ind}_{H \times S_{n-k}}^{S_n} V$) est uniformément stable et la décomposition se stabilise au delà de $n \geq 2k$.

Preuve. Le théorème donne la stabilité des coefficients de la décomposition en représentations irréductibles. L'injectivité et la surjectivité découlent de la construction de la représentation induite. \square

3.3 Exemple des cohomologies des espaces de configurations

Les cohomologies des espaces de configurations constituent une suite consistante de représentations. On peut les exprimer de façon à pouvoir appliquer le théorème de Hemmer.

Définition 3.5. *L'espace des configurations de n points dans \mathbb{R}^n est*

$$X_n := \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n; i \neq j \Rightarrow x_j \neq x_i\}$$

Le groupe symétrique S_n agit sur X_n en permutant les points des n -uplets : $\sigma(x_1, \dots, x_n) = (x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(n)})$, ce qui induit une représentation de S_n sur le groupe de cohomologie $H^i(X_n; \mathbb{Q})$.

Remarque 3.6. La cohomologie de X_n coïncide avec celle de son groupe fondamental P_n appelé groupe des tresses pures. L'espace vectoriel $H^1(P_n; \mathbb{Q})$ est engendré par les w_{jk} qui sont les classes de cohomologie représentées par les formes différentielles sur X_n $\frac{1}{2\pi i} \frac{dz_j - dz_k}{z_j - z_k}$.

Arnol'd a montré que la \mathbb{Q} -algèbre de cohomologie $H^*(P_n; \mathbb{Q})$ est engendrée par $H^1(P_n; \mathbb{Q})$ avec les relations

$$w_{jk} \wedge w_{kl} + w_{kl} \wedge w_{kj} + w_{lj} \wedge w_{jk} = 0, 0 \leq j, k, l \leq n$$

$H^i(P_n; \mathbb{Q})$ a alors pour base

$$\{w_{j_1 k_1} \wedge \dots \wedge w_{j_m k_m}; k_1 < \dots < k_m, j_m < k_m\}$$

La projection $X_{n+1} \rightarrow X_n$ qui oublie le dernier point donne lieu à une surjection $\psi_n : P_{n+1} \rightarrow P_n$ qui induit

$$\psi_n^* : H^*(P_n; \mathbb{Q}) \rightarrow H^*(P_{n+1}; \mathbb{Q})$$

Alors ψ_n envoie $w_{jk} \in H^1(P_n; \mathbb{Q})$ sur $w_{jk} \in H^1(P_{n+1}; \mathbb{Q})$. Il est donc clair que ψ_n^* est injective.

Pour $n \geq 2i$, vu la description de la base de $H^i(P_{n+1}; \mathbb{Q})$, un élément de cette base ne contient pas tous les indices de 1 à $n+1$. Dès lors à l'action d'un élément de S_{n+1} près qui transforme en un autre élément de la base dans lequel l'indice $n+1$ n'apparaît pas, tout élément de la base est l'image d'un élément de $H^i(P_n; \mathbb{Q})$, ce qui montre la surjectivité au sens voulu pour la stabilité d'une suite de représentations.

Théorème 3.7. *Pour tout $i \geq 0$, la suite de représentations $\{H^i(P_n; \mathbb{Q})\}$ est uniformément stable.*

Esquisse de preuve (détails [4]). Pour $k \leq n$, on a une projection $P_n \rightarrow P_k$. Soit S une partition de $\{1, \dots, n\}$, on considère la projection de P_n vers P_S qui est le produit des P_i pour i la taille des éléments de la partition S . Si par exemple $\{1, 2, 3, 4, 5\} = \{1, 3\}\{2\}\{4, 5\}$, on considère $P_n \rightarrow P_2 \times P_1 \times P_2$. Le passage à la cohomologie donne des inclusions $H^*(P_S; \mathbb{Q}) \rightarrow H^*(P_n; \mathbb{Q})$. On considère dans leurs images la cohomologie en degré maximal, qu'on note $H^S(P_n)$.

Orlik et Solomon montrent que $H^*(P_n; \mathbb{Q})$ en tant que représentation de S_n se décompose selon les images :

$$H^*(P_n; \mathbb{Q}) = \bigoplus_S H^S(P_n)$$

où S parcourt les partitions de $\{1, \dots, n\}$. L'action de S_n sur $\{1, \dots, n\}$ induit une action sur les partitions de $\{1, \dots, n\}$ qui permute les termes.

Chaque partition S de $\{1, \dots, n\}$ détermine une partition \bar{S} de l'entier n par les tailles des sous-ensembles de la partition. $H^S(P_n)$ contribue à $H^i(P_n; \mathbb{Q})$ si et seulement si $\text{card } \bar{S} = n - i$ car le degré minimal non nul de la cohomologie de chaque P_k est $k - 1$.

Si $\mu \vdash n$, on considère la partition de $\{1, \dots, n\}$

$$S_\mu := \{1, \dots, \mu_1\}, \{\mu_1 + 1, \dots, \mu_1 + \mu_2\}, \dots, \{\mu_1 + \dots + \mu_{l-1} + 1, \dots, n\}$$

qui est un représentant de l'orbite des S tels que $\bar{S} = \mu$. La sous-représentation $\bigoplus_{\bar{S}=\mu} H^S(P_n)$ est engendrée par $H^{S_\mu}(P_n)$ sous l'action de S_n . Dès lors

$$\bigoplus_{S=\mu} H^S(P_n) = \underset{\text{stab}(S_\mu)}{\text{ind}}^{S_n} H^{S_\mu}(P_n)$$

Comme $P_k \times P_1 \simeq P_k$ on peut voir P_S sous-groupe de P_n comme $P_{S(n+1)}$ sous-groupe de S_{n+1} , où pour $m > n$ $S(m) := S \cup \{n+1\} \cup \dots \cup \{m\}$. Si $S(n+1)$ est une partition en $(n+1) - i$ sous-ensembles et contribue donc à $H^i(P_{n+1}; \mathbb{Q})$ et on a en fait un isomorphisme entre $H^S(P_n)$ et $H^{S(n+1)}(P_{n+1})$. On note aussi $\mu(m) := (\mu_1, \dots, \mu_l, 1, \dots, 1)$.

Pour $n \geq 2i$, une partition de en $n+1 - i$ ensembles contient au moins un singleton et un représentant de son orbite s'écrit alors sous forme $S_{\mu(n+1)}$. Finalement la décomposition pour $n \geq 2i$ est

$$H^i(P_{n+1}; \mathbb{Q}) = \bigoplus_{\nu: n+1 \cup \{\nu\} = n+1-i} \bigoplus_{\text{stab}(S_\nu)} \text{ind}^{S_{n+1}} H^{S_\nu}(P_{n+1}) = \bigoplus_{\mu: n \cup \{\mu\} = n-i} \bigoplus_{\text{stab}(S_\mu(n+1))} \text{ind}^{S_{n+1}} H^{S_\mu(n+1)}(P_{n+1})$$

Or $H^{S_\mu(n+1)}(P_{n+1}) \simeq H^{S_\mu(m)}(P_n)$ et l'ensemble des partitions $\mu \vdash n$ de longueur $n - i$ est fini et ne dépend que de i (une partition de n de longueur $n - i$ à laquelle on enlève une case à chaque ligne donne une partition de i).

Reste donc à montrer que la suite $\{\text{ind}_{\text{stab}(S_\mu(m))}^{S_m} H^{S_\mu}(P_m)\}$ est uniformément stable.

Pour cela il reste à étudier ce stabilisateur $\text{stab}(S_{\mu(\langle m \rangle)})$. On peut montrer qu'il s'écrit sous la forme $\text{stab}(S_\nu) \times S_{m_1}$ pour une partition ν de $k := n - m_1$ avec m_1 le nombre de singletons dans $S_{\mu(m)}$ et que l'action de S_{m_1} est triviale sur $H^{S_\nu}(P_m)$. Comme alors $H^{S_\mu(m)}(P_m) \simeq H^{S_\nu}(P_k)$, on obtient la forme $\{\text{ind}_{H \times S_{m-k}}^{S_m} H^{S_\nu}(P_k)\}$ du théorème de Hemmer qui permet de conclure. \square

4 FI-modules

4.1 Première approche

Définition 4.1. La catégorie FI a pour objets les ensembles finis et morphismes les fonctions injectives.

Définition 4.2. Un FI -module sur un anneau commutatif k est un foncteur V de la catégorie FI vers la catégorie Mod_k des k -modules.

Les images d'un ensemble fini S et d'une fonction entre ensembles finis $f : S \rightarrow T$ par un FI -module V sont souvent notées V_S et $f_* : V_S \rightarrow V_T$.

Remarque 4.3. Les ensembles $\mathbf{n} := \{1, \dots, n\}$, pour $n \in \mathbb{N}$ et les injections entre ces ensembles constituent un squelette de la catégorie FI . Un FI -module est donc déterminé à isomorphismes près par les images V_n et $\text{hom}_{FI}(V_m, V_n)$, $m, n \in \mathbb{N}$.

Si $S \in FI$ et $f \in \text{End}_{FI}(S)$, alors f est une bijection, par functorialité f_* est un automorphisme.

$\text{End}_{FI}(n) \simeq S_n$, dès lors un FI -module V donne une suite (V_n) de représentations des groupes symétriques S_n .

La connaissance des modules V_n et des morphismes entre ces modules détermine le FI -module V à isomorphisme près.

4.2 FI-modules libres

Ne conserver que les bijections dans FI donne la catégorie FB des ensembles finis munis des bijections, accompagnée d'une notion de FB -module. Cette oubli donne lieu à une adjonction avec un foncteur permettant de créer un FI -module libre à partir d'un FB -module. Ces objets libres s'expriment convenablement en terme de représentations, et permettent des facilités de calculs des rangs d'injectivité et surjectivité introduits dans la section suivante. Ces facilités peuvent ensuite être réinvesties dans l'étude des FI -modules de type fini qu'on peut caractériser grâce à des FI -modules libres.

4.2.1 Définition et exemples

Définition 4.4. FB désigne la catégorie des ensembles finis munis des bijections entre ces ensembles. Un FB -module est un foncteur de la catégorie FB vers la catégorie des modules sur un anneau k .

Remarque 4.5. Un FB -module est exactement la donnée pour tout $n \in \mathbb{N}$ d'une représentation de S_n .

Une représentation W_a de S_a est considérée comme un FB -module en donnant $W_n = 0$ pour $n \neq a$.

Définition 4.6. L'inclusion de FB dans FI induit un foncteur d'oubli $\pi : FI\text{-mod} \rightarrow FB\text{-mod}$ ne conservant que les actions des groupes symétriques S_n sur les modules V_n .

Un tel foncteur admet une extension de Kan, explicitement : soit $M : FB\text{-Mod} \rightarrow FI\text{-Mod}$ l'adjoint à gauche du foncteur d'oubli π . À un FB -module W , le FI -module $M(W)$ associe à un ensemble fini S le k -module

$$M(W)_S = \text{colim}_{T \in FBf: T \rightarrow S} W_T = \bigoplus_{T \subset S} W_T$$

et à $f : S \rightarrow S'$ le morphisme $f_* = \bigoplus_{T \subset S} (f_T)_*$.

Remarque 4.7. Le module $M(W)_S$ consiste en le module W_S complété des modules correspondant aux $T \subset S$ plus petits pour permettre les injections.

Proposition 4.8. Le FI -module $M(W)$ peut s'exprimer à l'aide de représentations induites :

$$M(W)_n \simeq \bigoplus_{a \leq n} \text{ind}_{S_a}^{S_n} W_a$$

Preuve. Soit a un entier, S_a agit sur tous les $W_A \simeq W_a$ pour $A \subset n$ de cardinal a . Comme $\text{card Hom}_{FI}(a, n) = \binom{n}{a} = [S_n : S_a \times S_{n-a}]$, le nombre de W_A coïncide avec nombre de classes suivant S_a . $f \in \text{End}(n)$ agit alors par $\bigoplus_{A \in n} W_A \xrightarrow{\oplus (f_A)_*} \bigoplus_{A \subset n} W_{f(A)}$, on retrouve la représentation induite $\text{ind}_{S_a}^{S_n}$. \square

Remarque 4.9. Cette présentation permet de calculer la dimension du module $M(W)_n : \dim M(W)_n = \sum_{a \leq n} \dim W_a \cdot \binom{n}{a}$

Définition 4.10. Soit $m \geq 0$, $k[S_m]$ désigne la représentation régulière de S_m . On note $M(m)$ le FI -module $M(k[S_m])$, qui en tant que représentation de S_m est isomorphe à $k[\text{hom}_{FI}(m, \cdot)]$. En effet, pour un ensemble fini S , $M(k[S_m])_S = \bigoplus_{T \subset S} k[S_m]_T = \bigoplus_{T \subset S} \text{card } T = m k[S_m]$. En tant que représentation de $k[S_m]$, une base de $M(m)$ est indexée par les injections de m dans S .

Remarque 4.11. Un morphisme de FI -modules $F : M(m) \rightarrow V$ est déterminé par le choix d'un élément $v = F(\text{id}_m) \in V_m$. En effet via l'adjonction $\text{hom}_F I(M(m), V) \simeq \text{hom}_F B(k[S_m], V)$, côté FB -modules $k[S_m]$ n'est présent qu'en degré m et est engendré par l'élément identité sous l'action de S_m . $k[S_m] \rightarrow V$ est déterminé par l'image de id_m et détermine un unique morphisme $M(m) \rightarrow V$.

Exemple. Il existe pour tout ensemble S une unique injection $\emptyset \rightarrow S$. Le FI -module $M(0)$ est constant égal à k , et en tant que représentation de S_n , $M(0)_n \simeq k$ est la représentation triviale de S_n . Les injections $1 \rightarrow S$ coïncident avec les éléments de S ; $M(1)_S$ est le k -module libre sur les éléments de S , et en tant que représentation de S_n , $M(1)_n \simeq k^n$ la représentation par permutations.

$$M(1)_n = \text{ind}_{S_1 \times S_{n-1}}^{S_n} \sigma_1 \sigma_{n-1}$$

Définition 4.12. Soit $\lambda \vdash m$ une partition, on pose le FI-module $M(\lambda) := M(V_\lambda)$

4.2.2 FI-modules de type fini

Définition 4.13. Soit V un FI-module et $\Sigma \subset \sqcup V_n$. Le sous-FI-module engendré par Σ , $\langle V \rangle_\Sigma$, est le plus petit sous-FI-module de V contenant tous les éléments de Σ . On note $\langle \Sigma \rangle_{V \leq m} := \langle \sqcup_{i \leq m} \Sigma_i \rangle_V$ le sous-FI-module de V engendré par Σ en degré $\leq m$.

Proposition 4.14. Soit V un FI-module, choisir un élément $v \in V_m$ détermine un morphisme $M(m) \rightarrow V$. L'image de ce morphisme est $\langle v \rangle_V$. Plus généralement, si Σ est la réunion disjointe d'ensembles $\Sigma_n \subset V_n$, le morphisme $\bigoplus_{n \geq 0} M(n)^{\oplus \Sigma_n}$ a pour image $\langle \Sigma \rangle_V$

Preuve. Procédons par inclusions réciproques. Notons W l'image du morphisme $F : M(m) \rightarrow V$ déterminé par $F(id_m) = v$. Cette définition assure que $v \in W_m$ et donc que $\langle v \rangle_V \subset W$.

Soit un ensemble fini S ; un élément $f : m \rightarrow S$ de la base de $M(m)_S$ donnée par les injections $m \rightarrow S$ a pour image $f_*(v) \in V_S$. Dès lors, l'image W_S est le sous-module de V_S engendré par les éléments $f_*(v)$. Or tout sous-FI-module contenant v contient les éléments $f_*(v)$ car il s'agit d'un foncteur : $m \rightarrow S \in FI$ donc $f_* : V_m \rightarrow V_S$ est bien défini, s'en suit que $W \subset \langle v \rangle_V$. \square

Remarque 4.15. Prendre $\Sigma_n = V_n$, i.e. prendre tous les éléments de V comme ensemble générateur, donne une surjection $\bigoplus_{n \geq 0} M(n)^{\oplus V_n} \rightarrow V$.

Définition 4.16. Un FI-module V est engendré en degré $\leq m$ si V est engendré par un ensemble S d'éléments de V_k pour $k \leq m$.

Définition 4.17. Un FI-module V est de type fini s'il existe un ensemble fini d'éléments $v_1, \dots, v_k, v_i \in V_i$ qui engendre V , i.e. $\langle v_1, \dots, v_k \rangle_V = V$.

Proposition 4.18. Un FI-module V est de type fini si et seulement s'il existe un nombre fini d'entiers m_i et une surjection $\bigoplus_i M(m_i) \rightarrow V$.

Preuve. Si V est de type fini, il est engendré par des éléments $v_1, \dots, v_k, v_i \in V_{m_i}$. Dès lors le lemme précédent en choisissant $\Sigma = v_1, \dots, v_k$ donne un morphisme $\bigoplus_i M(m_i) \rightarrow V$ d'image $\langle v_1, \dots, v_k \rangle_V = V$.

Réciproquement s'il existe une surjection $F : \bigoplus_i M(m_i) \rightarrow V$, les composantes $M(m_i) \rightarrow V$ de ce morphisme sont déterminées par l'image de id_{m_i} . Le lemme indique alors que $V = \langle F(id_{m_1}), \dots, F(id_{m_k}) \rangle_V$ \square

5 Stabilité des FI-modules et des représentations

5.1 Stabilité des FI-modules

Définition 5.1. Soit M une représentation d'un groupe G . Le groupe des coinvariants de M est

$$M_G = M \otimes_{k[G]} k = M / \langle m - gm \rangle$$

Définition 5.2. Un $k[T]$ -module U est la donnée d'une suite (U_i) de k -modules et d'une application $T : U_i \rightarrow U_{i+1}$ (endomorphisme de degré un du k -module gradué U).

Définition 5.3. À $a \geq 0$, associons un ensemble quelconque \bar{a} de cardinalité a . Pour un FI-module V , soit $\Phi_a(V)$ le $k[T]$ -module défini par :

$$\Phi_a(V)_n := (V_{\bar{a} \sqcup n})_{S_n}$$

Pour définir l'application $T : \Phi_a(V)_n \rightarrow \Phi_a(V)_{n+1}$ associée, prendre une injection $f : n \rightarrow n+1$, qui s'étend en une injection $id \sqcup f : \bar{a} \sqcup n \rightarrow \bar{a} \sqcup n+1$, d'image par le FI-module $(id \sqcup f)_* : V_{\bar{a} \sqcup n} \rightarrow V_{\bar{a} \sqcup n+1}$, reste à prendre pour T l'induction au quotient $(V_{\bar{a} \sqcup n})_{S_n} \rightarrow (V_{\bar{a} \sqcup n+1})_{S_{n+1}}$

Exemple. On a l'expression $M(W)_{\bar{a} \sqcup n} = \bigoplus_{T \subset \bar{a} \sqcup n} W_T$.

Soit $w \in W_T$, $\sigma \in S_n$, alors $\sigma w \in W_{\sigma(T)}$. Les coinvariants de $M(W)_{\bar{a} \sqcup n}$ se décomposent donc selon les orbites de l'action de S_n sur les sous-ensembles $T \subset \bar{a} \sqcup n$.

L'orbite d'un tel T est déterminée par l'intersection $T \cap \bar{a} \subset \bar{a}$ et le cardinal $0 \leq \text{card } T \cap n \leq n$.

Preons un représentant (U, k) de cette orbite le stabilisateur de $T = U \sqcup k$ est composé des permutations de n préservant k , S_n agissant trivialement sur \bar{a} , ce qui s'identifie à $S_k \times S_{n-k} < S_n$. En passant aux coinvariants, $(W_{U \sqcup k})_{S_n} = (W_{U \sqcup k})_{S_k \times S_{n-k}} = (W_{U \sqcup k})_{S_k}$ car l'action de S_{n-k} sur $U \sqcup k$ est triviale et se ramène donc à celle de $S_k < S_{n-k}$. Finalement, en considérant W comme un FI-module, on peut identifier en tant que k -modules $(W_{\text{card } U \sqcup k})_{S_k} \simeq \Phi_{\text{card } U}(W)_k$.

$$\Phi_a M(W)_n \simeq \bigoplus_{U \subset \bar{a}, 0 \leq k \leq n} \Phi_{\text{card } U}(W)_k$$

Définition 5.4. Le rang de stabilité $\text{rg-stab}(V)$ (resp de surjectivité $\text{rg-sur}(V)$, d'injectivité $\text{rg-inj}(V)$) d'un FI-module V et le plus petit $s \geq 0$ tel que pour tout $a \geq 0$, pour lequel si $n \geq s$, alors l'application $T : \Phi_a(V)_n \rightarrow \Phi_a(V)_{n+1}$ est un isomorphisme (resp morphisme surjectif, injectif). $\text{stab} - \text{deg}(V) = \infty$ s'il n'existe pas.

Lemme 5.5. Soit V un FI-module et si W est un quotient de V , alors $\text{rg-sur}(W) \leq \text{rg-sur}(V)$. En caractéristique 0, si $W \subset V$ est un sous-module de V , alors $\text{rg-inj}(W) \leq \text{rg-inj}(V)$.

Preuve. La projection canonique $V \rightarrow W$ est surjective, propriété qui passe aux applications $\Phi_a(V)_n \rightarrow \Phi_a(W)_n$ le foncteur Φ_a étant exact à droite. Dès lors si $\Phi_a(V)_n \rightarrow \Phi_a(V)_{n+1}$ est surjective, il en va de même pour $\Phi_a(W)_n \rightarrow \Phi_a(W)_{n+1}$ par composition puisque le morphisme $V \rightarrow W$ étant un foncteur, le diagramme suivant commute

$$\begin{array}{ccc} V_n & \longrightarrow & W_n \\ \downarrow & & \downarrow \\ V_{n+1} & \longrightarrow & W_{n+1} \end{array} \quad \text{et devient} \quad \begin{array}{ccc} \Phi_a(V)_n & \longrightarrow & \Phi_a(W)_n \\ \downarrow & & \downarrow \\ \Phi_a(V)_{n+1} & \longrightarrow & \Phi_a(W)_{n+1} \end{array} \quad \square$$

Proposition 5.6. Soit W un FB -module. Le FI -module $M(W)$ a $\text{rg-inj}(M(W))=0$. Si pour $i > m$ $W_i = 0$, alors $\text{rg-sur}(M(W)) \leq m$. En particulier, pour le FI -module $M(m)$, $\text{rg-inj}(M(W)) = 0$, $\text{rg-sur}(M(W)) = \text{rg-stab}(M(W)) = m$

Preuve. - L'application $T : \Phi_a M(W)_n \rightarrow \Phi_a M(W)_{n+1}$ est induite par $\text{id} \sqcup f : \bar{a} \sqcup n \rightarrow \bar{a} \sqcup n + 1$, pour une injection $f : n \rightarrow n + 1$ arbitraire. L'injection $\text{id} \sqcup f$ préserve $T \cap \bar{a}$ ainsi que $\text{card} T \cap n = \text{card} T \cap n + 1$. En particulier la décomposition est préservée et l'identité envoie $\Phi_{\text{card} U}(W)_k \subset \Phi_a M(W)_n$ sur $\Phi_{\text{card} U}(W)_k \subset \Phi_a M(W)_{n+1}$. Dès lors, $T : \Phi_a M(W)_n \rightarrow \Phi_a M(W)_{n+1}$ étant toujours injective, $= 0$.

- Lorsque W_i est nul au delà du rang m , en particulier c'est aussi le cas de $\Phi_{\text{card} U}(W)_i$. Pour $n \geq m$, la condition $0 \leq k \leq n$ sur la somme est vide, la description de l'exemple est consistante quand $n \geq m$. Comme pour chaque composante de la somme T est un isomorphisme, $T : \Phi_a M(W)_n \rightarrow \Phi_a M(W)_{n+1}$ est un isomorphisme pour $n \geq m$, ce qui borne $M(W) \leq m$.

- cas $M(m)$ $\Phi_0(k[S_m])_m \simeq (k[S_m])_{S_m} \simeq k \neq 0$. Ce module n'apparaît dans $\Phi_a M(m)_n$ que lorsque $n \geq m$, d'où $M(m) = m$. \square

Proposition 5.7. Si un FI -module V est engendré en degré $\leq d$, alors $\text{rg-sur}(V) \leq d$.

Preuve. Pour V engendré en degré $\leq d$, la caractérisation par les modules libres donne que V est un quotient de $\bigoplus_{m \leq d} M(V_m)$, pour lequel $\leq d$. La proposition précédente permet de conclure. \square

5.2 Poids et rang de stabilité en caractéristique 0

On introduit ici la notion de poids, borne sur l'ensemble des représentations irréductibles des groupes symétriques d'un FI -module. On se place en caractéristique 0 pour bénéficier la décomposition donnée par la formule de Pieri.

Définition 5.8. Soit V un FI -module sur un corps de caractéristique 0. Le poids $\text{poids}(V)$ de V est le plus grand $|\lambda|$ parmi tous les λ apparaissant dans une décomposition en irréductibles $V(\lambda)_n$ des V_n . Pour $V = 0$, $\text{poids}(V) = 0$, et quand λ n'est pas borné, $\text{poids}(V) = \infty$

Proposition 5.9. Pour toute partition $\mu \vdash m$, le FI -module $M(\mu)$ sur un corps de caractéristique 0 a pour poids m .

Preuve. Le FI -module libre $M(\mu)$ s'exprime en tant que représentation comme l'induction $\text{ind}_{S_m \times S_{n-m}}^{S_n} V_\mu$. D'après la formule de Pieri, les composantes irréductibles V_ν de cette induction sont celles pour $\nu \vdash n$ obtenu en ajoutant $n - m$ cases dans des colonnes distinctes à μ . On a le nombre de colonnes $\nu_1 \geq n - m$ de ν , et $|\lambda| = n - \nu_1$ pour λ tel que $\lambda[n] = \nu$, et donc l'inégalité se réécrit $|\lambda| \leq m$, pour toutes les composantes irréductibles V_λ de $M(\mu)$. Dès lors $\text{poids}(M(\mu)) \leq m$. De plus le $V_{\mu[n]}$ apparaît dans la décomposition en irréductible car $\mu[n]$ s'obtient en ajoutant les $m - n$ cases dans les premières colonnes, donc $\text{poids}(M(\mu)) = m$. \square

Proposition 5.10. Soit V un FI -module sur un corps de caractéristique 0 engendré en degré $\leq d$, alors $\text{poids}(V) \leq d$.

Proposition 5.11. Soit V un FI -module sur un corps de caractéristique 0, pour tout $n \geq 0$, toute représentation irréductible constituant V_n son poids minoré par λ_n .

Proposition 5.12. Soit k un anneau Noethérien de caractéristique 0. Tout sous- FI -module d'un FI -module de type fini est de type fini.

5.3 Stabilité des représentations et FI-module de type fini

Théorème 5.13. Un FI -module V sur un anneau de caractéristique 0 est finielement engendré si et seulement si la suite $\{V_n\}$ de représentations des groupes symétriques est uniformément stable au sens des représentations et chaque V_n est de dimension finie.

En particulier, pour tout FI -module V finielement engendré, pour n assez grand, V_n se décompose en

$$V_n = \bigoplus_{\lambda \vdash [n]} c_\lambda V_\lambda$$

avec des coefficients c_λ indépendants de n .

5.4 Retour sur la cohomologie des espaces de configurations

Exemple. La présentation de Arnold de la cohomologie des espaces de configurations montre que le FI -module déterminé par $n \mapsto H^i(P_n; \mathbb{Q})$, $(n \rightarrow n + 1) \mapsto \psi_n^*$ est de type fini et donc que la suite de représentations est stable.

On peut en fait montrer le cas plus général :

Théorème 5.14. Soit M une variété connexe, orientée de dimension $d \geq 3$ et $\dim_{\mathbb{Q}}(H^*(M; \mathbb{Q})) < \infty$, alors le FI -module $H^*(M; \mathbb{Q})$ est de type fini et $\text{rg-stab}(H^*(M; \mathbb{Q})) \leq i$.

References

- [1] P. Cartier. A primer of hopf algebras. *Frontiers in Number Theory, Physics, and Geometry II*, 2006.
- [2] B. E. Sagan. *The Symmetric Group*. Wardsworth Brooks/Cole, 1993.
- [3] J-P. Serre. *Représentations linéaires des groupes finis*. Hermann, 1998.
- [4] B. Farb T. Church. Representation theory and homological stability. 2010.
- [5] B. Farb T. Church. Fi-modules and stability for representations of symmetric groups. 2012.