

Groupes fondamentaux et applications à la théorie des
nœuds

DEVILLE Esther, SOUANE Ibrahima

Remerciements

Nous remercions Mr. CAZANAVE de nous avoir épaulé pour ce mémoire.

Table des matières

1	Groupes fondamentaux	2
1.1	Premières notions	2
1.1.1	Notions de topologie	2
1.1.2	Groupes fondamentaux	3
1.1.3	Produits libres de groupes	5
1.1.4	Sommes amalgamées	6
1.2	Théorème de Van Kampen	7
1.2.1	Théorème et preuve	7
1.2.2	Applications du théorème	8
2	Applications aux nœuds	12
2.1	Introduction à la théorie des nœuds	12
2.2	Exprimer le groupe d'un nœud	13
2.2.1	Représentation du nœud polygonal	13
2.2.2	Groupe du nœud trèfle	13
2.3	Comparaison de nœuds	16
2.3.1	Nœud de huit	16
2.3.2	Groupe de deux cercles enlacés	17

Chapitre 1

Groupes fondamentaux

1.1 Premières notions

1.1.1 Notions de topologie

Soit Ω un espace topologique.

Définition 1.1.1. On appelle chemin une application continue $\varphi : [0, 1] \rightarrow \Omega$. On appelle $\varphi(0)$ l'origine et $\varphi(1)$ l'extrémité du chemin.

Définition 1.1.2. On dit qu'un espace Ω est connexe par arcs si tout élément x et tout élément y dans Ω peuvent être reliés par un chemin φ .

Définition 1.1.3. On appelle un lacet un chemin dont l'origine et l'extrémité coïncident, on dit que le lacet est basé en $x = \varphi(0)$.

Définition 1.1.4. On dit que deux chemins (ou lacets) γ_1 et γ_2 dans Ω sont composables si et seulement si : $\gamma_1(1) = \gamma_2(0)$. On peut construire la composée de ces deux chemins (ou lacets) par $\gamma = \gamma_1 \cdot \gamma_2$ avec : $\gamma|_{[0,1/2]} : t \mapsto \gamma_1(2t)$ et $\gamma|_{[1/2,1]} : t \mapsto \gamma_2(2t - 1)$.

Définition 1.1.5. Soit $\gamma : [0, 1] \rightarrow \Omega$, on appelle chemin (resp. lacet) inverse de γ le chemin (resp. lacet) qui à t associe $\gamma(1 - t)$ et on le note *bargamma*.

γ est appelé chemin (resp. lacet) constant en x si

$$\forall t \in [0, 1], \gamma(t) = x.$$

Définition 1.1.6. On dit que deux chemins γ_0 et γ_1 sont homotopes (équivalents) à extrémités fixes s'il existe une application $\delta : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow \Omega$ tel que :

$$\begin{aligned} \delta(s, t) \text{ est continue en } s \text{ et en } t, \\ \delta(t, 0) = \gamma_0(t), \\ \delta(t, 1) = \gamma_1(t), \\ \delta(0, s) = \gamma_0(0) = \gamma_1(0), \\ \delta(1, s) = \gamma_0(1) = \gamma_1(1). \end{aligned}$$

Cette relation s'applique aussi aux lacets. On note $\gamma_1 \sim \gamma_2$ la relation d'équivalence entre γ_1 et γ_2 et $[\gamma]$ la classe d'équivalence de γ à extrémités fixes.

Notation 1. On note $L(\Omega, x)$ l'ensemble des lacets basés en x .

Proposition 1.1.1. *Dans un espace convexe tous les lacets sont équivalents.*

1.1.2 Groupes fondamentaux

Définition 1.1.7. Soit l'ensemble des classes d'homotopies de lacets basés en x :

$$\pi_1(\Omega, x) = L(\Omega, x) / \sim$$

(où \sim est la relation d'homotopie à extrémité fixe). On munit cet ensemble de la loi de composition interne \bullet , ce groupe s'appelle le groupe fondamental de x .

Proposition 1.1.2. *Le groupe fondamental d'un espace connexe ne dépend pas d'un point base.*

Proposition 1.1.3. *Soit $f : \Omega \rightarrow \Omega'$, une application continue d'espaces topologiques et $\gamma \in L(\Omega, x)$, on a :*

- $f \circ \gamma = f_\gamma \in L(\Omega', y)$,
- si γ et γ' sont homotopes alors f_γ et $f_{\gamma'}$ le sont aussi.

Dans la suite de cette proposition on suppose que $f : \Omega \rightarrow \Omega'$ et $g : \Omega \rightarrow \Omega'$.

On a alors une application $f_ : \pi_1(\Omega, x) \rightarrow \pi_1(\Omega', f(x))$ qui, à chaque classe d'homotopie du lacet γ , associe la classe du lacet f_γ . On a :*

- $(f \circ g)_* = f_* \circ g_*$,
- $id_* = id$.

Proposition 1.1.4. *Si $f \sim g$ alors $f_* = g_*$.*

Proposition 1.1.5. *Si $h : \Omega \rightarrow \Omega'$ est un homéomorphisme alors h_* est un isomorphisme entre $\pi_1(\Omega, x_0)$ et $\pi_1(\Omega', h(x_0))$.*

Proposition 1.1.6. *Deux espaces homéomorphes ont des groupes fondamentaux isomorphes.*

Définition 1.1.8. Un espace est simplement connexe si et seulement si son groupe fondamental est trivial.

Proposition 1.1.7. *Soit Ω et Ω' deux espaces topologiques. On a :*

$$\pi_1(\Omega \times \Omega', (x_0, y_0)) \approx \pi_1(\Omega, x_0) \times \pi_1(\Omega', y_0).$$

Définition 1.1.9. On appelle équivalence d'homotopie une application continue $f : (X, x) \rightarrow (Y, y)$ qui possède une « inverse à homotopie près », c'est à dire une application $g : (Y, y) \rightarrow (X, x)$ telle que $f \circ g \sim id(Y)$ et $g \circ f \sim id(X)$, on dit X et Y ont le même type d'homotopie.

Proposition 1.1.8. Si $X \sim Y$ alors $\pi_1(X) \approx \pi_1(Y)$.

Remarque 1.1.1. La rétraction par déformation est une équivalence d'homotopie. En effet soit $Y \subset X$, on a $i : Y \rightarrow X$ l'inclusion et on pose $r : X \rightarrow Y$ tel que :

- $r \circ i = id_Y$
- $i \circ r \sim id_X$.

Exemple 1.1.1. $S^1 \subset \mathbb{R}^2 - \{0\}$

L'inclusion est évidente. Posons $r : \frac{x}{1} \mapsto \frac{x}{\|x\|}$. L'application $F(t, x) = \frac{x}{t + (1-t)\|x\|}$ est une homotopie.

Groupe fondamental du cercle

Le but de ce paragraphe est de montrer que $\pi_1(S^1) \approx \mathbb{Z}$:

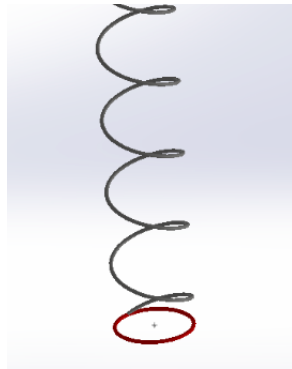
Théorème 1.1.1. $\pi_1(S^1, x)$ est un groupe cyclique, infini et engendré par la classe d'homotopie du lacet $l(t) = (\cos(2\pi t), \sin(2\pi t))$ basés en $(1, 0)$.

Démonstration. Soit $n \in \mathbb{Z}$ posons $\omega_n = (\cos(2\pi ns), \sin(2\pi ns))$. Le théorème signifie que chaque chemin de S^1 basé en $(1,0)$ est homotope à un ω_n pour un unique n .

On va donc comparer les chemins de S^1 et de \mathbb{R} par l'application continue surjective $p : \mathbb{R} \rightarrow S^1$ donnée par $p(s) = (\cos(2\pi s), \sin(2\pi s))$. Cette application vérifie : tout point de S^1 , il existe $\epsilon > 0$ tel que l'image réciproque de l'arc ouvert $U_\epsilon =]x - \epsilon, x + \epsilon[\subset S^1$ par p est une union disjointe d'ouverts de \mathbb{R} où chacun de ces ouverts est homéomorphe à U par p (p est un revêtement).

Ce revêtement peut être visualisé par l'inclusion de \mathbb{R} dans \mathbb{R}^3 comme une hélice paramétrée par $s \mapsto (\cos(2\pi s), \sin(2\pi s), s)$ et p la restriction de cette hélice à sa projection sur le plan $(x\mathbb{R}y)$.

On définit un l'application ω_n par :



$$\tilde{\omega}_n : \begin{cases} [0, 1] & \rightarrow \mathbb{R} \\ s & \mapsto \tilde{\omega}_n = ns \end{cases}$$

On a $p \circ \tilde{\omega}_n = \omega_n$ et le chemin ω_n tourne $|n|$ fois autour de l'hélice en montant si n est positif et en descendant si n est négatif.

Pour prouver l'existence et l'unicité de n nous auront besoin de deux lemmes :

Lemme 1.1.1. *Pour chaque chemin $\varphi : [0, 1] \rightarrow \Omega$ tel que $f(0) = x_0 \in \Omega$ et pour chaque $\tilde{x}_0 \in p^{-1}(x_0)$, il existe un unique chemin $\tilde{\varphi} : [0, 1] \rightarrow \tilde{\Omega}$ dont l'origine est \tilde{x}_0 .*

Lemme 1.1.2. *Pour chaque homotopie $\delta_t : [0, 1] \rightarrow \Omega$ de chemins dont l'origine est x_0 et chaque $\tilde{x}_0 \in p^{-1}(x_0)$, il existe une unique homotopie $\tilde{\delta}_t : [0, 1] \rightarrow \tilde{\Omega}$ telle que $\tilde{\delta}_t(0) = \tilde{x}_0$.*

Existence : Soit $\varphi : [0, 1] \rightarrow S^1$ un lacet basé en $x_0 = (1, 0)$, c'est un élément donné de $\pi_1(S^1, x_0)$. Par le lemme 1.1.1, il existe un chemin $\tilde{\varphi}$ commençant en 0 finissant en un certain $n \in \mathbb{Z}$ tel que $p \circ \tilde{\varphi}(1) = \varphi(1) = x_0$ et $p^{-1} = \mathbb{Z} \subset \mathbb{R}$. Soit $\tilde{\omega}_n$ défini plus haut, par homotopie linéaire de $(1-t)\tilde{\varphi} + t\tilde{\omega}_n$, on a $\tilde{\varphi} \sim \tilde{\omega}_n$ donc $\varphi \sim \omega_n$.

Unicité de n : Pour montrer que n est uniquement déterminé par la classe d'homotopie de φ , on suppose l'existence de $n, m \in \mathbb{N}$ tels que $\varphi \sim \omega_n$ et $\varphi \sim \omega_m$ on a donc $\omega_n \sim \omega_m$. Soit $\delta_t : [0, 1] \rightarrow \Omega$ telle que $\delta_0 = \omega_n$ et $\delta_1 = \omega_m$ par le lemme 1.1.2 cette homotopie donne une autre homotopie $\tilde{\delta}_t$ de chemins commençant en 0. L'unicité de la proposition 1.1.1 donne $\tilde{\delta}_0 = \tilde{\omega}_n$ et $\tilde{\delta}_1 = \tilde{\omega}_m$. Comme $\tilde{\delta}_t$ est une homotopie de chemins, l'application

$$\tilde{\delta}_t(1) \left| \begin{array}{l} [0, 1] \rightarrow \tilde{\Omega} \\ t \mapsto \tilde{\delta}_t(1) \end{array} \right. .$$

est donc continue.

Comme $Im(\tilde{\delta}_t(1)) \in \mathbb{Z}$ et est donc discret, on a bien $\tilde{\delta}_t(1)$ est constant en t , d'où $n = m$. \square

1.1.3 Produits libres de groupes

Soit G_1 et G_2 deux groupes, on appelle $A = G_1 \cap G_2$ un alphabet, et on appelle mot toute succession finie d'éléments de G_1 et de G_2 , (par exemple le mot $g_{i_1}g_{i_1}g_{i_2}h_{i_3}g_{i_1}$). On peut réduire les mots sous une forme unique en enlevant les éléments neutres de l'écriture et en remplaçant deux lettres consécutives $a^p a^q$ par a^{p+q} (ex : $a^3ba^2b^6a$).

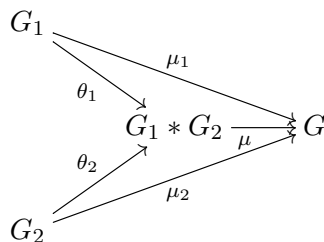
Le mot vide est le mot $\{\}$.

Définition 1.1.10. Soient G_1 et G_2 deux groupes, on considère l'ensemble des mots finis constitués d'éléments de G_1 et de G_2 , tel que l'on puisse simplifier, en supprimant l'élément neutre de l'écriture et en remplaçant deux éléments g et g' dans G_i consécutifs dans le mot, par son produit dans G_i . On obtient des mots réduits (comme précédemment) c'est-à-dire une suite finie d'éléments provenant alternativement de G_1 et de G_2 .

On munit l'ensemble des mots réduits par la loi de composition évidente, on pose le mot vide pour élément neutre, ceci constitue le groupe $G_1 * G_2$ produit libre de G_1 et G_2 .

Remarque 1.1.2. Si G est engendré par un nombre fini de générateurs alors G est isomorphe à un quotient du groupe libre à p générateurs. Tout sous-groupe d'un groupe libre est libre.

Proposition 1.1.9. *Les applications $\theta_1 : G_1 \rightarrow G_1 * G_2$ et $\theta_2 : G_2 \rightarrow G_1 * G_2$ sont des morphismes injectifs. En outre, soit G un groupe et $\mu_1 : G_1 \rightarrow G$, $\mu_2 : G_2 \rightarrow G$ des morphismes, il y a existence d'un unique morphisme $\mu : G_1 * G_2 \rightarrow G$ tel que $\mu \circ \theta_1 = \mu_1$ et $\mu \circ \theta_2 = \mu_2$. Autrement dit, le diagramme suivant est commutatif :*



Proposition 1.1.10. *Les groupes libres de rangs finis sont isomorphes à $\mathbb{Z} * \mathbb{Z} * \dots * \mathbb{Z}$.*

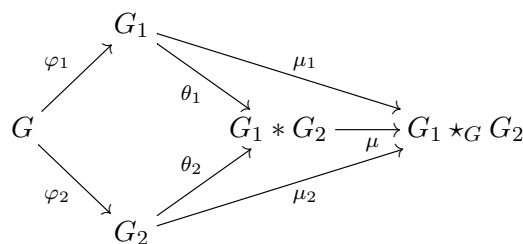
1.1.4 Sommes amalgamées

Définition 1.1.11. Soit G , G_1 et G_2 des groupes. Soit $\varphi_1 : G \rightarrow G_1$ et $\varphi_2 : G \rightarrow G_2$ des morphismes de groupes. On considère $G_1 * G_2$ et les deux inclusions $\theta_1 : G_1 \rightarrow G_1 * G_2$ et $\theta_2 : G_2 \rightarrow G_1 * G_2$. Soit N le plus petit sous-groupe distingué de $G_1 * G_2$ qui contient $(\theta_1 \circ \varphi_1(g))(\theta_2 \circ \varphi_2(g))^{-1}$ pour tout $g \in G$. Le groupe $(G_1 * G_2)/N$ s'appelle somme amalgamée de G_1 et G_2 sur G . Il se note $G_1 \star_G G_2$.

Proposition 1.1.11. *On note μ la surjection canonique de $G_1 * G_2 \rightarrow G_1 \star_G G_2$.*

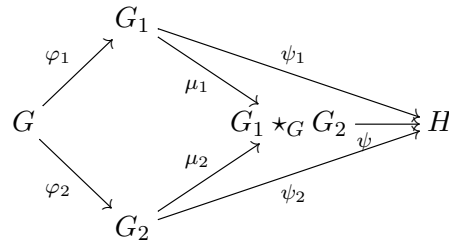
$$\mu \circ \theta_1 \circ \varphi_1 = \mu \circ \theta_2 \circ \varphi_2$$

Avec $\mu_i = \mu \circ \theta_i$, le diagramme suivant commute.



Théorème 1.1.2 (Propriété universelle de la somme amalgamée). *Soient H un groupe, $\psi_1 : G_1 \rightarrow H$ et $\psi_2 : G_2 \rightarrow H$ des morphismes de groupes, tels que $\psi_1 \circ \varphi_1 = \psi_2 \circ \varphi_2$.*

Il existe un unique morphisme $\psi : G_1 \star_G G_2 \rightarrow H$ qui étend ψ_1 et ψ_2 c'est-à-dire $\psi_1 = \psi \circ \mu_1$ et $\psi_2 = \psi \circ \mu_2$.



1.2 Théorème de Van Kampen

1.2.1 Théorème et preuve

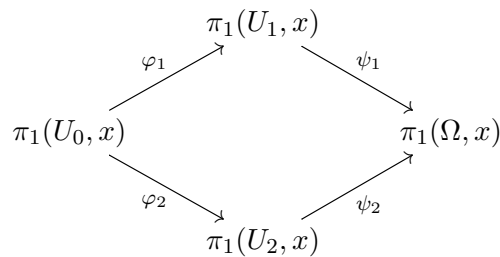
Théorème 1.2.1 (de Van Kampen). *Supposons que $\Omega = U_1 \cup U_2$, où :*

- U_1 et U_2 sont des ouverts connexes par arcs,
- $U_0 = U_1 \cap U_2$ ouvert connexe par arcs.

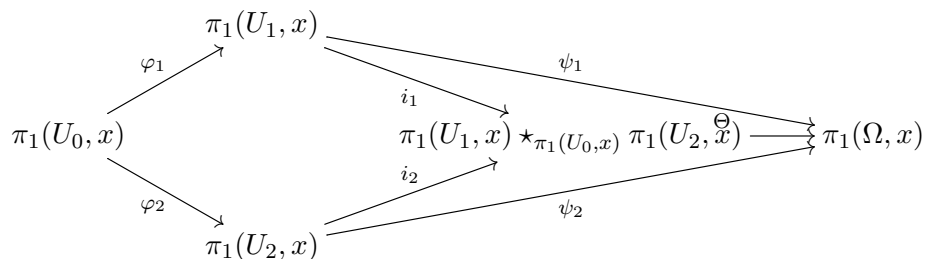
Soit $x \in U_0$, alors $\pi_1(\Omega, x)$ est la somme de $\pi_1(U_1, x)$ et $\pi_1(U_2, x)$ amalgamée par $\pi_1(U_0, x)$.

Démonstration. Il existe des morphismes injectifs $\varphi_1, \varphi_2, \psi_1, \psi_2$ tels que :

- $\varphi_i : \pi_1(U_0, x) \rightarrow \pi_1(U_i, x)$ et $\psi_i : \pi_1(U_i, x) \rightarrow \pi_1(\Omega, x)$,
- $\psi_1 \circ \varphi_1 = \psi_2 \circ \varphi_2$.



Il suffit de montrer qu'il existe un unique isomorphisme de groupes Θ qui va de $\pi_1(U_1, x) \star_{\pi_1(U_0, x)} \pi_1(U_2, x)$ dans $\pi_1(\Omega, x)$.

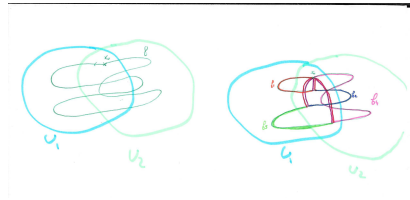


Existence de Θ est donné par la propriété universelle du produit amalgamé 1.1.2 présentée plus haut.

Surjectivité : Il suffit d'appliquer le lemme suivant :

Lemme 1.2.1. *Soit Ω un espace, si Ω est une union finie d'ouverts connexes par arcs A_1 et A_2 contenant un point base $x \in A_1 \cap A_2$, et si $A_1 \cap A_2$ est connexe par arcs, alors chaque lacet de Ω basé en x est homotope à un produit de lacets, chacun contenu dans un des ouverts A_i .*

Eléments de démonstrations. Soit $f : [0, 1] \rightarrow \Omega$ un lacet basé en x , on suppose qu'il existe une partition de $[0, 1] : 0 < s_0 < \dots < s_n < 1$ telle que pour chaque intervalle $[s_{i-1}, s_i]$, $f|_{[s_{i-1}, s_i]}$ soit dans A_1 ou dans A_2 . Comme f est continue, et comme A_1 et A_2 sont des ouverts connexes par arcs, chaque s_i admet un voisinage ouvert $V_{s_i} \in [0, 1]$ tel que $f|_{V_{s_i}}$ soit dans A_1 ou dans A_2 . On pose $f_i = f|_{[s_{i-1}, s_i]}$. On a $f = f_1 \cdot \dots \cdot f_n$. Comme $A_1 \cap A_2$, on peut « fermer » ces chemins en lacets en posant g_i le chemin qui relie $f(s_i)$ à x dans $A_1 \cap A_2$ et \bar{g}_i le chemin inverse. On a $(f_1 \cdot \bar{g}_1) \cdot (g_1 \cdot f_2 \cdot \bar{g}_2) \cdot \dots \cdot (g_{n-1} \cdot f_n)$.



□

On admettra l'injectivité.

□

1.2.2 Applications du théorème

Le groupe fondamental de la sphere unité

S^1 On peut partager le cercle en deux demi cercles qui sont chacun connexes par arc, cependant leur intersection sera composée de deux composantes connexes donc le théorème de Van Kampen ne s'applique pas.



S^n pour $n > 1$ On peut écrire une sphère comme réunion de deux hémisphères ouverts H_1 et H_2 . L'intersection $H_0 = H_1 \cap H_2$ est connexe par arcs. De plus, ces deux hémisphères sont homéomorphes au disque unité D^n qui est simplement connexe donc $\pi_1(D^n, x) = \{1\}$. $H_0 \sim S^{n-1} \times [0, 1]$, on a aussi $\pi_1(H_1, x) = \{1\}$ et $\pi_1(H_2, x) = \{1\}$. Donc par le théorème de Van Kampen, on a alors $\pi_1(S^n, x) \approx \pi_1(H_1, x) \star_{\pi_1(H_0, x)} \pi_1(H_2, x) \approx \{1\}$.



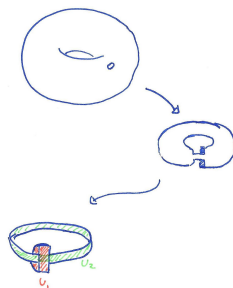
Groupe fondamental du tore à un trou

Posons $T_1 = S^1 \times S^1$, donc d'après la propriété 1.1.7, $\pi_1(T_1) \approx \pi_1(S^1) \times \pi_1(S^1)$. On a donc $\pi_1(T_1) \approx \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$.

Groupe fondamental du tore épointé

On appelle G le tore épointé, Les dessins suivants sont équivalents par équivalence d'homotopies.

On a donc $G = U_1 \cup U_2$, U_1 , U_2 , et $U_1 \cap U_2$ connexe par arcs.

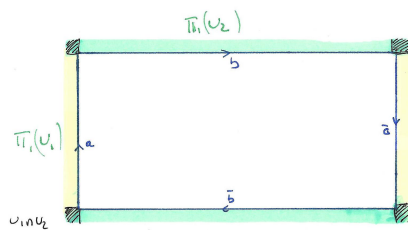


$U_1 \cap U_2$ est équivalent à un rectangle donc $\pi_1(U_1 \cap U_2) = \{1\}$

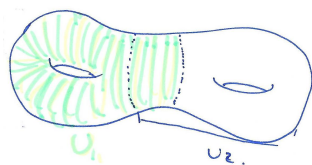
U_1 et U_2 sont isomorphes à S^1 donc $\pi_1(U_1) = \pi_1(U_2) = \mathbb{Z}$

$$\pi_1(G) = \mathbb{Z} \star_{\{1\}} \mathbb{Z} = \mathbb{Z} * \mathbb{Z}$$

Donc $\pi_1(G)$ est engendré par deux générateurs.

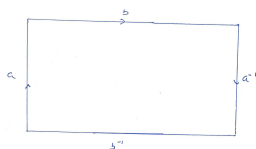


Groupe fondamental du tore à 2 trous



On peut regarder le tore à 2 trous comme « l'union de deux tores époutés » avec pour intersection un cylindre (connexe par arcs).

Il reste à déterminer $i_* : \pi_1(U_0, x) \rightarrow \pi_1(G, x)$.



Soit a et b qui engendrent $\pi_1(G, x)$, $\pi_1(U_0, x)$ est engendré par $a \cdot b \cdot \bar{a} \cdot \bar{b}$.

En appliquant le théorème de Van Kampen, on obtient :

$$\pi_1(T_2, x) = \pi_1(G, x) \star_{\pi_1(U_0, x)} \pi_1(G, x)$$

donc :

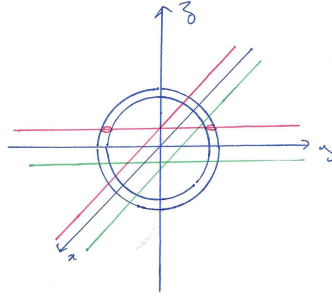
$$\pi_1(T_2, x) = \langle a, b, c, d; a \cdot b \cdot \bar{a} \cdot \bar{b} \cdot c \cdot d \cdot \bar{c} \cdot \bar{d} \rangle.$$

Groupe fondamental du complémentaire du cercle

On va étudier le complémentaire du cercle unité \mathcal{C} du plan yOz dans \mathbb{R}^3 . Pour cela on va étudier le complémentaire du tore \mathcal{T} dans \mathbb{R}^3 paramétré par

$$\left(\sqrt{y^2 + z^2} - 1\right)^2 + x^2 - \epsilon^2 = 0$$

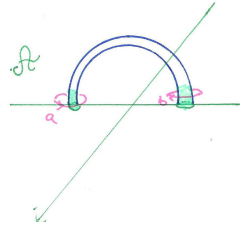
avec $\frac{1}{4} > \epsilon > 0$ car on peut passer du cercle au tore par rétraction par déformation.



\mathbb{R}^3 peut s'exprimer comme l'union de deux ouverts : $\mathcal{A} = \left\{ z > -\frac{1}{4} \right\}$ et $\mathcal{B} = \left\{ z < \frac{1}{4} \right\}$.
 $\mathcal{A} - \mathcal{T}$, $\mathcal{B} - \mathcal{T}$, et $\mathcal{A} \cap \mathcal{B} - \mathcal{T}$ sont clairement connexes par arcs.

$\pi_1(\mathcal{A} - \mathcal{T}, x) = \mathbb{Z}$ et $\pi_1(\mathcal{B} - \mathcal{T}, x) = \mathbb{Z}$ car $\pi_1(\mathcal{A} - \mathcal{T}, x)$ et $\pi_1(\mathcal{B} - \mathcal{T}, x)$ sont isomorphes au groupe fondamental du cercle.
 $(\mathcal{A} \cap \mathcal{B} - \mathcal{T}) \sim (\mathbb{R}^2 - \{(0, 0), (0, 1)\})$, donc $\pi_1(\mathcal{A} \cap \mathcal{B} - \mathcal{T}, x) = \mathbb{Z} * \mathbb{Z}$.

Il reste à déterminer $i_*\pi_1(\mathcal{A} \cap \mathcal{B}, x) \rightarrow \pi_1(\mathcal{A} - \mathcal{T}, x)$ et $i'_*\pi_1(\mathcal{A} \cap \mathcal{B}, x) \rightarrow \pi_1(\mathcal{B} - \mathcal{T}, x)$.



$$\left| \begin{array}{l} \pi_1(\mathcal{A} \cap \mathcal{B} - \mathcal{T}, x) \rightarrow \pi_1(\mathcal{A} - \mathcal{T}, x) \\ a \mapsto g \\ b \mapsto g \end{array} \right. .$$

Et,

$$\left| \begin{array}{l} \pi_1(\mathcal{A} \cap \mathcal{B} - \mathcal{T}, x) \rightarrow \pi_1(\mathcal{B} - \mathcal{T}, x) \\ a \mapsto h \\ b \mapsto h \end{array} \right. .$$

Par le théorème de Van Kampen, $\pi_1(\mathcal{A} - \mathcal{T}, x) \star_{\pi_1(\mathcal{A} \cap \mathcal{B} - \mathcal{T}, x)} \pi_1(\mathcal{B} - \mathcal{T}, x) = \langle g, h; g = h \rangle$, donc $\pi_1(\mathcal{A} - \mathcal{T}, x) \star_{\pi_1(\mathcal{A} \cap \mathcal{B} - \mathcal{T}, x)} \pi_1(\mathcal{B} - \mathcal{T}, x) = \mathbb{Z}$.

Chapitre 2

Applications aux nœuds

2.1 Introduction à la théorie des nœuds

De façon peu formelle, on peut définir un nœud comme une ficelle enroulée sur elle-même dont les extrémités ont été soudées.

Définition 2.1.1. On appelle nœud \mathcal{K} l'image d'une application continue injective $\eta : S^1 \rightarrow \mathbb{R}^3$.

On appelle nœud trivial le cercle $x^2 + y^2 = 1$.

Pour étudier les nœuds on va les « épaissir » c'est-à-dire on va étudier $\mathcal{K} \times D_\varepsilon^2$ (avec $\varepsilon > 0$), on a alors $\mathcal{K} \times D_\varepsilon^2 \sim \mathcal{K}$ par rétraction par déformation.

Définition 2.1.2. On dit que deux nœuds \mathcal{K} et \mathcal{K}' sont équivalents s'il existe un homéomorphisme $h : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ tel que $h(\mathcal{K}) = \mathcal{K}'$.

On en déduit une condition nécessaire pour l'équivalence des nœuds : leurs complémentaires doivent être homéomorphes et donc leurs groupes fondamentaux doivent être aussi isomorphes.

Notation 2. On note $G(\mathcal{K})$ le groupe fondamental du complémentaire nœud \mathcal{K} ($\pi_1(\mathbb{R}^3 - \mathcal{K}, x)$) (avec x un point base arbitraire). On appelle $G(\mathcal{K})$ le groupe du nœud \mathcal{K} .

Le groupe du nœud trivial est isomorphe à \mathbb{Z} .

Définition 2.1.3. On dit qu'un nœud \mathcal{K} est polygonal, s'il est l'image d'une application polygonale injective $\eta : S^1 \rightarrow \mathbb{R}^3$, telle qu'il existe une subdivision du segment $[0, 2\pi] : 0 = s_0 < s_1 < \dots < s_n = 2\pi$, où sur chaque segment $[s_i, s_{i+1}]$, l'application $t \mapsto \eta(t)$ est linéaire affine.

Dans la suite on appellera des nœuds polygonaux \mathcal{K} et \mathcal{K}' .

Définition 2.1.4. On dit que deux nœuds sont isotopes s'il existe une application continue $F : S^1 \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^3$ telle que si on note $F(t, x) = f_t(x)$, l'application $f_t : S^1 \rightarrow \mathbb{R}^3$ soit polygonale injective $\forall t \in [0, 1]$, $f_0 = \mathcal{K}$, $f_1 = \mathcal{K}'$.

Théorème 2.1.1. *Deux nœuds polygonaux isotopes sont équivalents.*

2.2 Exprimer le groupe d'un nœud

On utilisera le nœud trèfle pour illustrer la méthode :

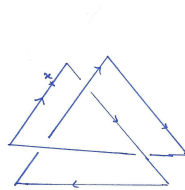


2.2.1 Représentation du nœud polygonal

On travaillera sur une projection orthogonale d'un nœud sur un plan \mathcal{P} . Cette projection est une ligne polygonale fermée telle que :

- il existe un nombre fini de points singuliers,
- les points singuliers sont à l'intérieur des cotés (appelés croisements),
- les points singuliers sont au plus des points doubles,
- quand on représente un croisement, on « efface » un petit segment autour du croisement sur la ligne représentant celle du dessous,
- on oriente le nœud.

On sait que ce plan existe car seul un nombre fini de plan ne vérifie pas ces critères.



On définit sur ce plan \mathcal{P} un repère $(0, x, y)$ complété par la droite Oz notée \mathcal{D} .

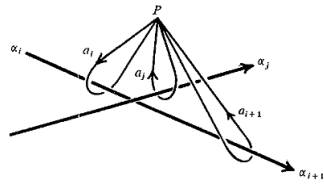
2.2.2 Groupe du nœud trèfle

Intuitivement :

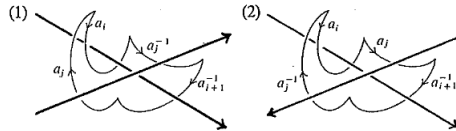
Une fois cette représentation faite, on constate que si on « casse » la branche « du dessous » lacet à chaque croisement on obtient un ensemble fini de lignes brisées notées α_i .

$\pi_1(\mathbb{R}^3 - \mathcal{K}, P)$ est engendré par les lacets basés en un certain $P \in \mathcal{D}$ (au dessus du nœud) et qui tournent autour des lignes α_i dans le sens direct.

L'orientation du nœud permet de nommer les croisements ainsi que les lignes brisées qui les relient : prenons le segment représentant l'arc qui passe au dessous du croisement i , on appelle a_i le segment qui s'arrête avant et a_{i+1} le segment qui commence après.

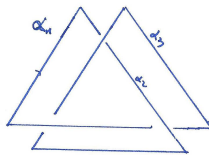


On a donc :



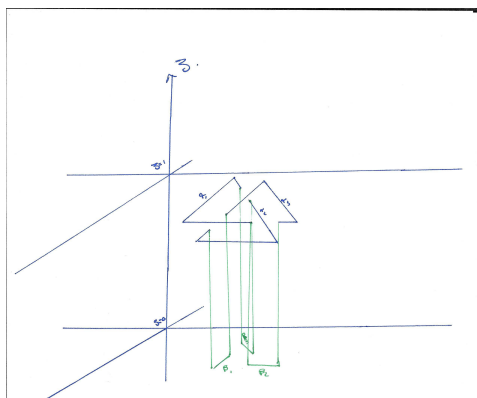
On se retrouve avec des relations comme : $a_i \cdot \bar{a}_j \cdot \bar{a}_{i+1} \cdot a_j = 1$ pour le croisement de type (1).

Et $a_i \cdot a_j \cdot \bar{a}_{i+1} \cdot \bar{a}_j = 1$ pour le croisement de type (2).*



On veut pouvoir utiliser le théorème de Van Kampen. On pose donc que la projection ci-dessus est dans le plan $z = 1$. On relie les segments α_i et α_{i+1} par des lignes brisées composées de segments verticaux, qui relient le plan $\{z = 1\}$ au plan $\{z = 0\}$, qui sont reliés par des segments $\beta_j \in \{z = 0\}$, on a ainsi une courbe fermée dans \mathbb{R}^3 .

Enfin, on suppose que cette figure est entourée par un tube de rayon $\frac{\epsilon}{2}$, avec $\epsilon > 0$.



Cette figure est homéomorphe au nœud \mathcal{K} , on l'appelle \mathcal{N} .

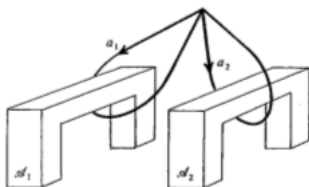
On a donc $\pi_1(\mathbb{R}^3 - \mathcal{K}) = \pi_1(\mathbb{R}^3 - \mathcal{N})$.

$\mathbb{R}^3 - \mathcal{N}$ est l'union de deux ouverts : $\mathcal{A} = \{z > 0\} - \mathcal{N}$ et $\mathcal{B} = \left\{z < \frac{\epsilon}{2}\right\} - \mathcal{N}$.

Donc le théorème de Van Kampen nous donne $\pi_1(\mathbb{R}^3 - \mathcal{N}) \sim \pi_1(\mathcal{A}, x) \star_{\pi_1(\mathcal{A} \cap \mathcal{B})} \pi_1(\mathcal{B}, x)$.

Calcul de $\pi_1(\mathcal{A}, x)$

$\pi_1(\mathcal{A}, x)$ est engendré par les lacets a_i tournant autour des "tunnels" contenant les α_i .
Or $\pi_1(\mathcal{A}, x) \sim \mathbb{R}^2 - \{a_1, \dots, a_i\}$ par rétraction par déformation, donc $\pi_1(\mathcal{A}, x) = \mathbb{Z} * \dots * \mathbb{Z}$.



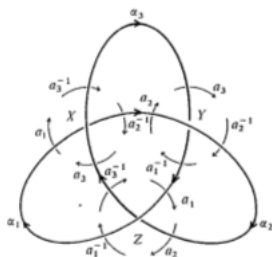
Dans le cas du nœud trèfle $\pi_1(\mathcal{A}, x)$ est engendré par trois éléments.

Calcul de $\pi_1(\mathcal{B}, x)$

\mathcal{B} est simplement connexe donc on a $\pi_1(\mathcal{B}, x) = \{1\}$.

Enfin $\mathcal{A} \cap \mathcal{B} = \left\{0 < z < \frac{\epsilon}{2}\right\} - \mathcal{N}$ donc $\pi_1(\mathcal{A} \cap \mathcal{B}, x)$ est un groupe libre de rang 6
(dans le cas général le rang est égal au double du nombre de croisements).

Enfin,



Et on a d'après * on a :

$$\begin{cases} a_1 \cdot \bar{a}_3 \cdot \bar{a}_2 \cdot a_3 & = & 1 \\ a_3 \cdot \bar{a}_2 \cdot \bar{a}_1 \cdot a_2 & = & 1 \\ a_2 \cdot \bar{a}_1 \cdot \bar{a}_3 \cdot a_1 & = & 1 \end{cases}$$

en remplaçant a_1 par $\bar{a}_3 \cdot a_2 \cdot a_3$, on a :

$$\begin{aligned} a_3 \cdot a_2 \cdot a_3 &= a_2 \cdot a_3 \cdot a_2, \\ (a_2 \cdot a_3 \cdot a_2)^2 &= (a_2 \cdot a_3 \cdot a_2) \cdot (a_3 \cdot a_2 \cdot a_3) = (a_3 \cdot a_2)^2, \end{aligned}$$

Si on pose $a = a_2 \cdot a_3 \cdot a_2$ et $b = a_3 \cdot a_2$, on a :

$$a^2 = b^3.$$

On a donc $G(\mathcal{K}) = \langle a, b; a^2 = b^3 \rangle$.

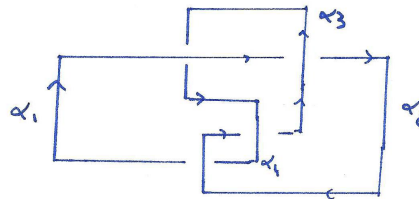
2.3 Comparaison de nœuds

La méthode précédente s'applique pour tout les nœuds.

2.3.1 Nœud de huit



Il y a quatre arcs, $\alpha_1, \dots, \alpha_4$.



De la même manière, $\pi_1(\mathcal{A}) = \mathbb{Z} * \mathbb{Z} * \mathbb{Z} * \mathbb{Z}$, $\pi_1(\mathcal{B}) = \{1\}$ et $\pi_1(\mathcal{A} \cap \mathcal{B}) = \mathbb{Z} * \dots * \mathbb{Z}$ (engendré par huit éléments).

On a :

$$\begin{cases} a_1 \cdot \bar{a}_3 \cdot \bar{a}_2 \cdot a_3 = 1 \\ a_2 \cdot a_4 \cdot \bar{a}_3 \cdot \bar{a}_4 = 1 \\ a_3 \cdot \bar{a}_1 \cdot \bar{a}_4 \cdot a_1 = 1 \\ a_4 \cdot a_2 \cdot \bar{a}_1 \cdot \bar{a}_2 = 1 \end{cases}$$

On remplace a_1 par $\bar{a}_3 \cdot a_2 \cdot a_3$, on a :

$$\begin{cases} a_2 \cdot a_4 \cdot \bar{a}_3 \cdot \bar{a}_4 = 1 \\ \bar{a}_2 \cdot a_3 \cdot \bar{a}_4 \cdot \bar{a}_3 \cdot a_2 \cdot a_3 = 1 \\ a_4 \cdot a_2 \cdot \bar{a}_3 \cdot \bar{a}_2 \cdot a_3 \cdot \bar{a}_2 = 1 \end{cases}$$

On isole a_4 :

$$\begin{cases} a_2 \cdot a_4 = a_4 \cdot a_3 \\ a_4 = \bar{a}_3 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot \bar{a}_2 \cdot a_3 \\ a_4 = a_2 \cdot \bar{a}_3 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot \bar{a}_2 \end{cases}$$

Les deuxième et troisième lignes vérifient bien la première, on a donc l'expression :

$$\bar{a}_3 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot \bar{a}_2 \cdot a_3 = a_2 \cdot \bar{a}_3 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot \bar{a}_2.$$

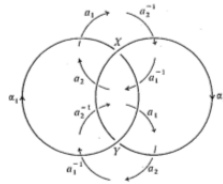
En posant $a = a_2$ et $b = a_3$ on a donc $\pi_1(\mathbb{R}^3 - \mathcal{K}) \approx \langle a, b; \bar{b} \cdot a \cdot b \cdot \bar{a} \cdot b = a \cdot \bar{b} \cdot a \cdot b \cdot \bar{a} \rangle$

Remarque 2.3.1. Il est difficile de dire si deux nœuds sont ou ne sont pas équivalents.

2.3.2 Groupe de deux cercles enlacés



On oriente ces cercles comme précédemment : on a deux croisements et deux arcs.



On a la même relation aux deux croisements :

$$a_1 \cdot a_2 = a_1 \cdot a_2.$$

Le groupe des deux cercles enlacés est donc $G = \langle a, b; a \cdot b = b \cdot a \rangle \approx \mathbb{Z}^2$

Bibliographie

- [1] André GRAMAIN. *Topologie des surfaces*. 1971.
- [2] Allen HATCHER. *Algebraic Topology*. 2001.