Corrigé

Exercice I

1) I est maximal si $I \neq A$ et si pour tout idéal J de A on a

$$I \subsetneq J \Rightarrow J = A.$$

(autrement dit I est maximal pour l'inclusion parmi les idéaux stricts de A).

2) $\Rightarrow$ Soit I maximal.

Soit $\bar{a} \in A/I$ un élément non nul. $\bar{a} \neq 0$ signifie que $a \notin I$.

L'idéal $J = (a) + I$ est A par maximalité de I ($J \neq I$ car $a \notin I$, $a \in J$).

Comme $1 \in A = (a) + I$, $\exists\, b \in A$, $\exists\, i \in I$, $1 = ab + i$

En repassant dans A/I, on obtient $\bar{a}\bar{b} = \bar{1}$ dans A/I donc $\bar{a}$ est bien inversible.

$\Leftarrow$ Si A/I est un corps, soit $J \supsetneq I$ un idéal. Soit $j \in J \setminus I$.

$\bar{j} \in A/I$ est un élément non nul, donc inversible : $\exists\, \bar{k} \in A/I$, $\bar{j}\bar{k} = \bar{1}$.

En remontant dans A, on a $\exists\, i \in I$, $i + jk = 1$.

Comme $i \in I \subset J$, $jk \in (j) \subset J$, on a $1 \in J$ et donc $J = A$.

3) L'idéal (12) de $\mathbb{Z}$ n'est pas maximal : on a $(12) \subsetneq (3)$.

Exercice II

On effectue l'algorithme d'Euclide dans $\mathbb{Z}[i]$:

1)
$$5 = (3+2i) + (2-2i)$$
$$3+2i = (2-2i)i + 1$$
$$2-2i = 1\cdot(2-2i) + 0.$$

$\leadsto$ un pgcd de 5 et $3+2i$ est 1. (ils sont donc premiers entre eux).

2)
$$5+i = (3+i) + 2.$$
$$3+i = 2 + (1+i)$$
$$2 = (1+i)(1-i) + 0.$$

$\leadsto$ pgcd $(5+i, 3+i) = (1+i)$.

Exercice III

1) A est un sous-anneau de $\mathbb{C}$ qui est intègre ; il est donc lui aussi intègre.

2) Montrons que les inversibles de A sont 1 et -1.
Il est clair que ces 2 éléments sont inversibles.
Réciproquement, si $u \in A$ est inversible, $\exists v \in A$, $uv = 1$.
Mais alors $N(uv) = |uv|^2 = |u|^2|v|^2 = 1$.
Comme $|u|$ et $|v|$ sont des entiers ≥ 0, on a nécessairement $|u|^2 = |v|^2 = 1$.
Si $u = a + ib\sqrt{5}$ avec $a, b \in \mathbb{Z}$, $|u|^2 = a^2 + 5b^2$, d'où $|u|^2 = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 = 1 \\ b = 0 \end{cases}$
$\Leftrightarrow$ $u = +/- 1$.
Donc les seuls inversibles sont bien 1 et -1.

3) On a $N(3) = 9$ et $N(7) = 49$.
S'ils étaient réductibles, il existerait des éléments $\alpha, \beta \in A$ tous non inversibles tq
$\gamma, \delta \in A$

$3 = \alpha \cdot \beta$
$7 = \gamma \cdot \delta$ D'où $N(3) = N(\alpha) \cdot N(\beta)$
$N(7) = N(\gamma) \cdot N(\delta)$.

Comme $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ ne sont pas inversibles $N(\alpha), N(\beta), N(\gamma), N(\delta) > 1$ et on a
$N(\alpha) = N(\beta) = 3$ et $N(\gamma) = N(\delta) = 7$.
Or les équations $a^2 + 5b^2 = 3$ et $a^2 + 5b^2 = 7$ n'ayant pas de solutions entières, il n'existe pas d'éléments de norme 3 ou 7 dans A. D'où une contradiction. 3 et 7 sont donc irréductibles dans A.

4) On a $21 = 1^2 + 2^2 \cdot 5$ Donc $21 = (1+2i\sqrt{5})(1-2i\sqrt{5})$ dans A. ($21 = 4^2 + 5 \cdot 1^2$ conduit à $21 = (4+i\sqrt{5})(4-i\sqrt{5})$)
$21 = 3 \cdot 7 = (1+2i\sqrt{5})(1-2i\sqrt{5})$.
3 est irréductible mais pas premier dans A : en effet, on a $3 \mid (1+2i\sqrt{5})(1-2i\sqrt{5})$ mais 3 ne divise aucun de ces facteurs (les quotients sont dans $\mathbb{Q}[i\sqrt{5}] \setminus \mathbb{Z}[i\sqrt{5}]$)
(De même 7 n'est pas premier mais irréductible).

5) A n'est pas principal : dans un anneau principal, ~~éléments~~ premiers et irréductibles coïncident, or on vient de voir que 3 est irréductible mais pas premier.