Anneaux

Exercice 1. — Soit k un corps et $k[X]$ l'anneau des polynômes à coefficients dans k.

a) Montrer que $k[X]$ est intègre.

b) Déterminer les éléments inversibles de $k[X]$.

c) Généraliser aux anneaux de polynômes $A[X]$ où A est un anneau intègre.

Exercice 2. — Montrer que $\mathbf{Z}[i] := \{a + ib, \quad a, b \in \mathbf{Z}\}$ est un sous-anneau intègre de $\mathbf{C}$.
Déterminer l'ensemble de ses éléments inversibles.
Montrer que $\mathbf{Q}[i] := \{a + ib, \quad a, b \in \mathbf{Q}\}$ est un sous-corps de $\mathbf{C}$.

Exercice 3. — Montrer que l'ensemble $\mathbf{R}^2$ muni des lois $+$ et $\star$ définies par

$$(a, b) + (c, d) := (a + c,\ b + d) \qquad (a, b) \star (c, d) := (ac,\ bc + ad)$$

est un anneau commutatif.
Est-il intègre ? Déterminer l'ensemble de ses éléments inversibles.

Exercice 4. — Soit A un anneau.

a) Pour $a \in A$ fixé, montrer que l'application $\begin{matrix} A \to A \\ x \mapsto x + a \end{matrix}$ est bijective.

b) On suppose A intègre. Pour $a \in A - \{0\}$ fixé, montrer que l'application $\begin{matrix} A \to A \\ x \mapsto a \cdot x \end{matrix}$ est injective.

c) On suppose que A est intègre et fini. Montrer que A est un corps.

Exercice 5. — Soit A un anneau intègre et $K \subset A$ un sous-anneau qui est un corps et tel que A soit un K-ev de dimension finie. Montrer que A est un corps.
[**Indication:** Adapter la démonstration de l'exercice *4*-c.]
Application : Montrer que l'anneau $\mathbf{Q}[\sqrt[3]{2}] := \{a + b\sqrt[3]{2} + c(\sqrt[3]{2})^2,\ a, b, c \in \mathbf{Q}\}$ est un corps.

Exercice 6. — Fabriquer un anneau, noté $\mathbf{F}_2$, dont les seuls éléments sont 0 et 1.

Exercice 7. — Soit $\mathbf{F}_3 = \{0, 1, x\}$ un anneau avec trois éléments.

a) Donner les tables d'addition et de multiplication de $\mathbf{F}_3$.

b) $\mathbf{F}_3$ est-il intègre ?

Exercice 8. — Construire un anneau intègre $\mathbf{F}_4 = \{0, 1, x, y\}$ à quatre éléments contenant $\mathbf{F}_2 = \{0, 1\}$ comme sous-anneau.

Exercice 9. — ***a)*** Justifier que l'anneau $\mathbf{Q}[\sqrt{2}] := \{a + b\sqrt{2},\ a, b \in \mathbf{Q}\}$ est un $\mathbf{Q}$-espace vectoriel de dimension 2 dont une base est $\{1, \sqrt{2}\}$. (En particulier les coefficients a et b ci-dessus sont uniques.)

b) Soit $N : \mathbf{Z}[\sqrt{2}] \to \mathbf{Z}$ l'application

$$a + b\sqrt{d} \mapsto a^2 - 2b^2.$$

Montrer par un calcul direct que pour $\alpha, \beta \in \mathbf{Z}[\sqrt{2}]$ on a $N(\alpha\beta) = N(\alpha)N(\beta)$.

c) Soit $\alpha \in \mathbf{Z}[\sqrt{2}]$. Justifier que l'application $m_\alpha : \mathbf{Q}[\sqrt{2}] \to \mathbf{Q}[\sqrt{2}]$, $x \mapsto \alpha \cdot x$ est linéaire. Calculer son déterminant et retrouver le résultat de la question précédente sans calcul.

d) Montrer qu'un élément $\alpha \in \mathbf{Z}[\sqrt{2}]$ est inversible ssi $N(\alpha) = 1$ ou $N(\alpha) = -1$.

e) Montrer que l'ensemble des éléments inversibles de $\mathbf{Z}[\sqrt{2}]$ est infini.