L3 Algèbre. Exercices. Extensions de corps.

1) Soit K un corps de caractéristique différente de 2 et L une extension quadratique de K c'est-à-dire une extension de K de degré 2.

a) Soit $\alpha \in L \backslash K$ montrer que son polynôme minimal sur K est du type $X^2 + aX + b$ avec a et b dans K. Montrer que $K(\alpha) = L$.

b) Soit $\beta = \alpha + \frac{a}{2}$. Montrer que $\beta^2 \in K$

c) Montrer que que $K(\beta) = L$ (on dit que L est une extension de K par racine carrée)

d) Donner un contre-exemple lorsque K est un corps de caractéristique 2

2) Soit P un polynôme irréductible sur K de degré $n > 1$ et L une extension de K de degré $m < n$. Est-ce que P peut avoir une racine dans L?

Le polynôme $P(X) = X^3 + X + 1$ a t'il des racines dans $Q(i)$? Le polynôme $P(X) = X^3 - X^2 + X - 1$ a t'il des racines dans $Q(i)$? Le polynôme $P(X) = X^3 - X^2 - 2X + 2$ a t'il des racines dans $Q(i)$?

3) Soit P un polynôme sur K de degré $n > 1$.

a) Montrer que si P n'est pas irréductible sur K alors $P = AB$ avec $A \in K[X]$, $B \in K[X]$ et A irréductible sur K de degré $\leq n/2$.

b) Soit $L = K[X]/(A)$ montrer que L est une extension de K de degré $m \leq n/2$ et que P a une racine dans L.

c) Soit $P \in \mathbb{Q}[X]$ un polynôme de degré 5 sans racine dans $\mathbb{Q}$ et tel que pour toute extension quadratique L de $\mathbb{Q}$ le polynôme P n'a pas de racine dans L. Montrer que P est irréductible sur $\mathbb{Q}$.

4) Soit P un polynôme irréductible sur K de degré $n > 1$ et une extension L de K de degré $m > 1$ avec m et n premiers entre eux.

a) Montrer que si P n'est pas irréductible sur L alors il existe une extension L_1 de L de degré $[L_1; L] < n$ telle que P ait une racine $\alpha \in L_1$.

b) Déterminer $[K(\alpha) : K]$ et

c) Montrer que n divise $[L(\alpha) : K]$

d) Montrer que $[L(\alpha) : K] = [L(\alpha) : L].m$

e) Déduire de ce qui précède que si P un polynôme irréductible sur K de degré $n > 1$ et une extension L de K de degré $m > 1$ avec m et n premiers entre eux alors P est irréductible sur L.

5) Montrer que $X^3 - 2$ est irréductible sur $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$. Déterminer $[\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}, \sqrt{2}) : \mathbb{Q}]$.

6) Soit K un corps et $P(X) = X^n + a_{n-1}X^{n-1} + ... + a_0$ un polynôme de $K[X]$.

a) Si K est de caractéristique 0 et P irréductible sur K, montrer que les racines de P dans $\overline{K}$ sont simples.

b) Soit K un corps fini, de caractéristique p. Montrer que si P' est nul alors p divise n et $a_j = 0$ si j n'est pas multiple de p. En déduire que dans ce cas $P(X) = Q(X^p)$ pour un certain $Q \in K[X]$. En utilisant le fait que l'application $x \mapsto x^p$ est une bijection de K montrer que $Q(X^p) = Q(X)^p$ En déduire que la conclusion du a) reste vraie pour un corps fini.

7) Soit K un corps, a et b deux éléments de $\overline{K}$, montrer que $[K(a, b); K(a)] \leq [K(b); K]$. Donner des exemples où l'on a égalité et où l'on a inégalité stricte

L3 Algèbre. Exercices. Extensions de corps. Racines. Indications .

1) a) Le polynôme minimal sur K de α ne peut être de degré 1, ni de degré ≥ 3 puisque $K(\alpha) \subset L$. Ensuite pour voir que $K(\alpha) = L$ on examine les degrés.

b) On a $(\alpha + \frac{a}{2})^2 = (\frac{a}{2})^2 - b$

c) On a $K(\beta) = K(\alpha)$

d) Prendre une extension de degré 2 de $\mathbb{F}_2$.

2) Si α est une racine de P dans L alors $K(\alpha) \subset L$ et on examine les degrés.

3) a) On décompose en facteurs irréductibles.

b) L est un corps car A est irréductible sur K et m=degré de A.

A une constante près le polynôme A est le polynôme minimal sur K de la classe de X.

c) Appliquer a) et b).

4) a) voir exercice précédent

b) P est irréductible sur K et $P(\alpha) = 0$ donc $[K(\alpha) : K] = n$

c) $[L(\alpha) : K] = [L(\alpha) : K(\alpha)][K(\alpha) : K]$

d) $[L(\alpha) : K] = [L(\alpha) : L][L : K]$

f) n divise $[L(\alpha) : L].m$ et est premier avec m donc il divise $[L(\alpha) : L] \leq [L_1 : L]$!

5) On applique 4) et on utilise le th. de multiplicativité des degrés.

6) a) Si α est une racine multiple de P alors $P'(\alpha) = 0$ or P est le polynôme minimal de α donc P divise P' donc $P' = 0$ or $P'(X) = nX^{n-1} + \sum_{j=1}^{n} ja_jX^{j-1}$.

b) On a

$$nX^{n-1} + \sum_{j=1}^{n} ja_jX^{j-1} = 0$$

mais ici on est en caractéristique p cela n'implique pas que tous les coefficients soient nuls. On a seulement $n = 0(p)$ et $ja_j = 0(p)$ ce qui donne $n = pq$ et $a_j = 0$ sauf si j est multiple de p.

Donc

$$P(X) = Q(X^p) = X^{pq} + \sum b_mX^{pm} = X^{pq} + \sum c_m^pX^{pm} = (X^q + \sum c_mX^m)^p$$

ce qui prouve que l'on n'a pas irréductibilté, le raisonnement est alors le même qu'en a).

7) Le polynôme minimal $M_{K,b}$ est multiple de $M_{K(a),b}$

$$a = \sqrt{2}, b = \sqrt{3}$$

$$a = \sqrt{2}, b = \sqrt[4]{2}$$