Examen partiel du 15 mars 2016

1 h 30

La correction tiendra grandement compte de la clarté et de la concision de la rédaction.
L'utilisation de calculatrice, de téléphone portable et autre gadget est interdite.

* *
*

Exercice I. — **Question de cours**
Soit A un anneau et $I \subset A$ un idéal.

1) Que signifie que l'idéal I est maximal ?

2) Montrer que I est maximal si et seulement si l'anneau quotient A/I est un corps.

3) L'idéal $I = (12)$ de l'anneau $\mathbf{Z}$ est-il maximal ?

* *
*

Exercice II. — Soit $A = \mathbf{Z}[i]$ l'anneau des entiers de Gauss.

1) Déterminer un pgcd dans A de 5 et $3 + 2i$.

2) Expliciter un isomorphisme $\mathbf{Z}[i]/(15 + 10i) \xrightarrow{\cong} \mathbf{Z}[i]/(5) \times \mathbf{Z}[i]/(3 + 2i)$.

* *
*

Exercice III. — Soit A l'anneau $\mathbf{Z}[i\sqrt{5}]$ (dont les éléments sont les $a + bi\sqrt{5}$ avec a et b dans $\mathbf{Z}$).

1) Montrer que l'anneau A est intègre.

2) Déterminer les éléments inversibles de A.
[**Indication:** On pourra utiliser la fonction N qui à $a \in A$ associe son module au carré $|a|^2$.]

3) Montrer que les éléments 3 et 7 sont irréductibles dans A.

4) Trouver deux entiers a, b *tous deux non nuls* tels que l'on ait dans A la factorisation

$$21 = (a + bi\sqrt{5}) \cdot (a - bi\sqrt{5}).$$

[**Indication:** On pourra commencer par chercher $a, b \in \mathbf{Z}$ tels que $21 = a^2 + 5b^2$.]
En déduire un élément de A qui est irréductible mais pas premier.

5) L'anneau A est-il principal ?