

Anneaux quotient

Exercice 1. — Soit n un entier.

- a) Montrer que l'ensemble des éléments inversibles de $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$ est $\{\bar{a}, \text{pgcd}(a, n) = 1\}$.
- b) Quels sont les éléments inversibles dans $\mathbf{Z}/9\mathbf{Z}$?
- c) Si p est premier et $k \geq 0$, combien y a-t-il d'éléments inversibles dans $\mathbf{Z}/p^k\mathbf{Z}$?

Exercice 2. — Soit $n \geq 1$ un entier.

- a) Montrer que l'anneau $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$ est intègre ssi n est premier.
- b) En déduire que $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$ est un corps ssi n est premier.
- c) Calculer les inverses des éléments de $\mathbf{Z}/7\mathbf{Z}$.
- d) Calculer l'inverse de 50 dans $\mathbf{Z}/97\mathbf{Z}$.

Exercice 3. — a) Soit d un diviseur de n . Montrer que le morphisme de réduction

$$\begin{aligned} \mathbf{Z}/n\mathbf{Z} &\rightarrow \mathbf{Z}/d\mathbf{Z} \\ x \bmod n &\mapsto x \bmod d \end{aligned}$$

est bien défini. Déterminer son image et son noyau.

b) Si m et n sont deux entiers premiers entre eux, montrer que le morphisme de réduction $\mathbf{Z}/mn\mathbf{Z} \rightarrow \mathbf{Z}/m\mathbf{Z} \times \mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$ est un isomorphisme (*lemme chinois*).

c) Quel est le noyau du morphisme de réduction $\mathbf{Z}/mn\mathbf{Z} \rightarrow \mathbf{Z}/m\mathbf{Z} \times \mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$?

Montrer que son image est isomorphe à $\mathbf{Z}/\text{ppcm}(m, n)\mathbf{Z}$.

Montrer qu'un élément $(x \bmod m, y \bmod n)$ est dans son image ssi l'on a $x \equiv y \pmod{\text{pgcd}(n, m)}$.

d) Résoudre dans \mathbf{Z} : $\begin{cases} x \equiv 1 \pmod{7} \\ x \equiv 3 \pmod{5} \end{cases}$, $\begin{cases} x \equiv 1 \pmod{45} \\ x \equiv 3 \pmod{6} \end{cases}$, $\begin{cases} x \equiv 4 \pmod{45} \\ x \equiv 1 \pmod{6} \end{cases}$.

e) Les anneaux \mathbf{Z}/mn et $\mathbf{Z}/n \times \mathbf{Z}/m$ sont-ils isomorphes si m et n ne sont pas premiers entre eux ?

Exercice 4. — Montrer que le groupe $(\mathbf{Z}[i], +)$ est isomorphe à \mathbf{Z}^2 .

L'anneau $(\mathbf{Z}[i], +, \cdot)$ est-il isomorphe à l'anneau produit $(\mathbf{Z}^2, +, \cdot)$?

Exercice 5. — Soit A un anneau et $I \subset A$ un idéal.

- a) Que dire de I s'il contient un élément inversible ?
- b) Soient $a, b \in A$. Montrer que le plus petit (au sens de l'inclusion) idéal de A contenant a et b est $\{ua + vb, (u, v) \in A^2\}$.

Exercice 6. — Soit $A := C^0(\mathbf{R}, \mathbf{R})$ l'anneau des applications continues de \mathbf{R} dans \mathbf{R} .

- a) Quels sont les éléments inversibles de A ?
- b) Montrer que l'ensemble des fonctions continues à support compact est un idéal. Est-il engendré par un nombre fini d'éléments ?
- c) Montrer que $I_0 := \{f \in A, f(0) = 0\}$ est un idéal de A . Montrer que I_0 est maximal.

Exercice 7. — Soient A un anneau et $a, b \in A$. Montrer l'équivalence :

$$a \mid b \iff (b) \subset (a).$$

Exercice 8. — Soit A un anneau et $I \subsetneq A$ un idéal strict.

- a) Montrer que I est premier ssi l'anneau A/I est intègre.
- b) Montrer que I est maximal ssi l'anneau A/I est un corps.