

## Feuille d'exercices n°2

**1. Classes de conjugaison, centre et groupes d'ordre  $p^2$ .** Pour un groupe  $G$  on considère l'action de  $G$  sur  $G$  définie par conjugaison, i.e. à  $g \in G$  on associe l'automorphisme  $c_g : G \rightarrow G : x \mapsto gxg^{-1}$ .

Les orbites de cette action s'appellent les *classes de conjugaison de  $G$* , i.e. deux éléments  $x, y \in G$  appartiennent à la même classe de conjugaison si et seulement s'il existe  $g \in G$  tel que  $c_g(x) = gxg^{-1} = y$ .

Le *centralisateur* d'un  $x \in G$  est défini par  $C_{G,x} = \{g \in G \mid c_g(x) = x\}$ .

Le *centre* de  $G$  est défini par  $Z(G) = \{g \in G \mid \forall x \in G : c_g(x) = x\}$ .

**1.a.** Montrer que  $C_{G,x}$  est un sous-groupe de  $G$ . Rappeler pourquoi  $[G : C_{G,x}]$  calcule le cardinal de la classe de conjugaison contenant  $x$ . En déduire que le cardinal d'une classe de conjugaison de  $G$  divise l'ordre de  $G$ .

**1.b.** Montrer que le centre est le noyau d'un morphisme de groupes  $G \rightarrow \text{Aut}(G)$ . En déduire que le centre est un sous-groupe distingué de  $G$ . Montrer qu'il est abélien. Montrer que si  $G/Z(G)$  est cyclique (i.e. engendré par un seul élément) alors  $G$  est abélien, i.e.  $G = Z(G)$  resp.  $G/Z(G) = \{e_{G/Z(G)}\}$ .

**1.c.** Montrer que le centre de  $G$  consiste précisément en les éléments de  $G$  dont la classe de conjugaison est singleton.

**1.d.** Soit  $G$  un  $p$ -groupe. Déduire de **1.a** que les cardinaux des classes de conjugaison de  $G$  sont des puissances de  $p$ . En déduire (à l'aide de **1.c**) que le centre d'un  $p$ -groupe possède plus d'un élément.

**1.e.** Déduire de **1.b** et **1.d** qu'un groupe d'ordre  $p^2$  est abélien. Qu'en est-il des groupes d'ordre  $p^3$ ? Que peut-on dire du centre d'un groupe non abélien d'ordre  $p^3$ ?

**2. Classes de conjugaison de  $\mathfrak{S}_n$ .**

**2.a.** Soit  $\sigma \in \mathfrak{S}_n$  une permutation cyclique  $\sigma = (i_1 i_2 i_3 \cdots i_k)$  et  $\tau \in \mathfrak{S}_n$  une permutation quelconque. Montrer que  $\tau\sigma\tau^{-1}$  est la permutation cyclique  $(\tau(i_1)\tau(i_2)\tau(i_3)\cdots\tau(i_k))$ .

**2.b.** Déduire de **2.a** que si  $\sigma_1, \sigma_2 \in \mathfrak{S}_n$  appartiennent à la même classe de conjugaison alors elles ont le même nombre d'orbites et il existe une bijection entre  $\sigma_1$ -orbites et  $\sigma_2$ -orbites qui préserve le cardinal des orbites.

**2.c.** Montrer que si  $\sigma_1, \sigma_2 \in \mathfrak{S}_n$  ont le même nombre d'orbites tel qu'il existe une bijection entre  $\sigma_1$ -orbites et  $\sigma_2$ -orbites qui préserve le cardinal des orbites, alors  $\sigma_1$  et  $\sigma_2$  appartiennent à la même classe de conjugaison.

**2.d.** Déduire de **2.b** et **2.c** qu'il y a autant de classes de conjugaison de  $\mathfrak{S}_n$  que de *partitions* de  $n$  (i.e. de décompositions en entiers  $n = k_1 + k_2 + \cdots + k_s$  avec  $0 < k_1 \leq k_2 \leq \cdots \leq k_s$ ).

**2.e.** Énumérer les classes de conjugaison de  $\mathfrak{S}_2, \mathfrak{S}_3$  et  $\mathfrak{S}_4$  en explicitant leurs éléments.

**3. Produit direct.** Soit  $G$  un groupe avec sous-groupes distingués  $N$  et  $H$  tels que  $N \cap H = \{e_G\}$  et  $NH = G$ .

**3.a.** Montrer que tout  $x \in G$  s'écrit d'une et d'une seule manière sous la forme  $x = nh$  avec  $n \in N$  et  $h \in H$ .

**3.b.** Montrer que  $nh = hn$  pour tous  $n \in N$  et  $h \in H$ . En déduire un isomorphisme de groupes  $G \cong N \times H$ .

On dit que  $G$  est le *produit direct* de  $N$  et de  $H$ .

**3.c.** Montrer qu'un groupe  $G$  d'ordre  $pq$  (avec  $p, q$  des nombre premiers distincts) est abélien si et seulement si  $G$  ne possède qu'un seul  $p$ -Sylow et un seul  $q$ -Sylow. Montrer que le cas échéant  $G$  est isomorphe au produit direct de ses sous-groupes de Sylow.

**3.d.** Déterminer tous les 2- et 3-Sylow de  $(\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}, +)$  et de  $\mathfrak{S}_3$ .

**4. Produit semi-direct.** Soit  $G$  un groupe avec sous-groupes  $N, H$  tels que  $N$  distingué,  $N \cap H = \{e_G\}$  et  $NH = G$ .

**4.a.** Montrer pour tout  $x \in G$  l'unicité de l'écriture  $x = nh$  avec  $n \in N$  et  $h \in H$ . En déduire l'existence d'un morphisme de groupes surjectif  $\phi : G \rightarrow H$  qui associe à  $nh \in G$  l'élément  $h \in H$ . Montrer que  $\text{Ker}(\phi) = N$ .

On dit que  $G$  est le *produit semi-direct* de  $N$  et de  $H$ , et on note  $G \cong N \rtimes H$ .

**4.b.** Montrer l'existence d'un morphisme de groupes  $\rho : H \rightarrow \text{Aut}(N)$  associant à  $h \in H$  l'automorphisme  $\rho_h : N \rightarrow N : n \mapsto hnh^{-1}$ ; en particulier si  $x_1 = n_1 h_1$  et  $x_2 = n_2 h_2$  alors  $x_1 x_2 = n_1 \rho_{h_1}(n_2) h_1 h_2$ .

**4.c.** Montrer que  $\mathfrak{S}_3 \cong \mathfrak{A}_3 \rtimes \mathfrak{S}_2$  en explicitant  $\rho : \mathfrak{S}_2 \rightarrow \text{Aut}(\mathfrak{A}_3)$ . Montrer que  $\mathfrak{A}_3$  et  $\mathfrak{S}_2$  sont cycliques.

**4.d.** Montrer que  $D_{2n} \cong (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +) \rtimes \mathfrak{S}_2$  en explicitant  $\rho : \mathfrak{S}_2 \rightarrow \text{Aut}(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +)$ .

**5. Produit en couronne et 2-Sylow de  $\mathfrak{S}_{2^k}$ .** On suppose que  $G$  est une sous-groupe de  $\mathfrak{S}_m$ .

**5.a.** Montrer qu'il existe deux sous-groupes  $G_1$  et  $G_2$  de  $\mathfrak{S}_{2m}$  isomorphes à  $G$  et tels que  $G_1$  (resp.  $G_2$ ) fixe les éléments  $m+1, m+2, \dots, 2m$  (resp.  $1, 2, \dots, m$ ). Montrer que  $G_1 \cap G_2 = \{e_{\mathfrak{S}_{2m}}\}$  et que les éléments de  $G_1$  commutent avec les éléments de  $G_2$ .

**5.b.** On note  $\mathfrak{S}_2 \wr G$  le sous-groupe de  $\mathfrak{S}_{2m}$  engendré par  $G_1, G_2$  et la permutation  $\tau \in \mathfrak{S}_{2m}$  définie par  $\tau(i) = i+m$  si  $i \leq m$  et  $\tau(i) = i-m$  si  $i > m$ . Montrer que  $\mathfrak{S}_2 \wr G$  est le produit semi-direct  $(G_1 \times G_2) \rtimes \mathfrak{S}_2$  pour un automorphisme  $\mathfrak{S}_2 \rightarrow \text{Aut}(G_1 \times G_2)$  qu'on explicitera. En déduire que l'ordre de  $\mathfrak{S}_2 \wr G$  est  $2n^2$  où  $n$  est l'ordre de  $G$ .

**5.c.** Montrer que si 2 ne divise pas  $\frac{1}{2} \binom{2m}{m}$  (\*) et si  $G$  est un 2-Sylow de  $\mathfrak{S}_m$ , alors  $\mathfrak{S}_2 \wr G$  est un 2-Sylow de  $\mathfrak{S}_{2m}$ . Montrer que  $m = 2^k$  vérifie (\*).

**5.d.** Construire par récurrence sur  $k$  un 2-Sylow de  $\mathfrak{S}_{2^k}$ . Quel est son ordre?

MOTS-CLÉS : classe de conjugaison, centre,  $p$ -groupe, produit direct, produit semi-direct, sous-groupe de Sylow.