# Examen final du 29 janvier 2013

2 heures

*La correction tiendra grandement compte de la clarté et de la concision de la rédaction. Le sujet est composé de trois exercices indépendants. Au sein d'un exercice, le candidat peut admettre le résultat d'une question pour traiter les suivantes* **s'il le précise explicitement**.

**Exercice 1** - Soit $p$ un nombre premier.

1. Soit $\Gamma$ un $p$-groupe agissant sur un ensemble fini $X$. On note $X^\Gamma \subset X$ l'ensemble des points fixes. On note $|E|$ le cardinal d'un ensemble fini $E$. Montrer que l'on a la congruence
$$|X| \equiv |X^\Gamma| \bmod p.$$
2. Soit $G$ un groupe fini de cardinal divisible par $p$. On fait agir $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ sur $G^p$ par $i \cdot (x_0, \ldots, x_{p-1}) = (x_i, x_{i+1}, \ldots, x_{i-1})$ (i.e. on décale les indices de $i$, en identifiant $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ et $\{0, \ldots, p-1\}$). Soit $Y$ le sous-ensemble de $G^p$ des $(x_0, \ldots, x_{p-1})$ vérifiant $x_0 x_1 \cdots x_{p-1} = 1$. Montrer que $Y$ est stable par $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$. Quels sont les points fixes de cette action ?
3. Montrer que $|Y|$ est divisible par $p$.
4. En utilisant (1), déduire que $G$ admet des éléments d'ordre $p$.
5. Déterminer l'ensemble des éléments d'ordre $p$ dans $G = (\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}, +)$ et dans $G = (\mathbb{F}_{p^n}, +)$.

* *
*

**Exercice 2** - Soit $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ la droite projective complexe. On note $z$ la coordonnée complexe.

1. Soit $h$ l'homographie de $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ donnée par $z \mapsto \frac{1}{z}$. Déterminer l'image par $h$ du cercle de centre $\frac{i}{2}$ et de rayon $\frac{1}{2}$.

2. Soit $C$ un cercle quelconque de $\mathbb{R}^2 = \mathbb{C}$ et $D$ une droite quelconque de $\mathbb{R}^2 = \mathbb{C}$. En utilisant (1), montrer qu'il existe une homographie $g$ de $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ telle que $g(C) = D$.

* *
*

**Exercice 3** - Soit $G$ un groupe fini et $A \subset G$ un sous-groupe *abélien*. Soit également

$$\rho : G \to \mathrm{GL}(V)$$

une représentation *irréductible* de $G$. On note $\tilde{\rho} : A \subset G \xrightarrow{\rho} \mathrm{GL}(V)$ la représentation de $A$ obtenue par restriction. Soit $W \subset V$ une sous-représentation irréductible de $\tilde{\rho}$.

1. Que vaut $\dim W$ ?
2. Montrer que l'espace vectoriel $\mathrm{Vect}\{g \cdot w,\ g \in G\ , w \in W\}$ est égal à $V$.
3. En déduire que $\dim V \leq |G/A|$.
4. Application : montrer que les représentations irréductibles du groupe diédral $D_n$ sont de dimension 1 ou 2.

Fin du sujet