Actions de groupe sur un ensemble

Exercice 1 - Soit X un ensemble sur lequel opère un groupe G. Soit également $Y \subset X$ un sous-ensemble. Montrer que Y est stable sous l'action de G si et seulement si Y est réunion d'orbites.

Exercice 2 - Ecrire les deux morphismes $D_4 \to \mathfrak{S}_4$ associés à l'action du groupe diédral sur l'ensemble des sommets et des arêtes d'un carré.

Exercice 3 - **(Centre des p–groupes.)**
Soit G un groupe fini. On note $Z(G)$ le centre de G et pour tout $g \in G$, on note $\mathrm{Conj}(g)$ sa classe de conjugaison.

1. Montrer l'équivalence :
$$g \in Z(G) \iff |\mathrm{Conj}(g)| = 1.$$
2. Soit p un nombre premier. On suppose que G est de cardinal une puissance de p (on dit que G est un p–groupe). Montrer que $Z(G)$ est de cardinal divisible par p (et est donc en particulier non trivial !).
[**Indication :** Ecrire l'équation aux classes pour l'action de G sur lui-même par conjugaison.]

Exercice 4 - [**Les colliers de Pólya**[1]**.**]
On souhaite dénombrer le nombre de colliers distincts que l'on peut fabriquer avec 6 perles et 3 couleurs. On considère que deux colliers sont identiques si l'on passe de l'un à l'autre par une rotation. En appliquant la formule de Burnside à l'action du groupe $\mathbf{Z}/6\mathbf{Z}$ sur l'ensemble de tous les colliers possibles (sans identification), montrer qu'il y a 130 types de colliers distincts.

Exercice 5 - Soit X un ensemble fini de cardinal $n \geq 2$, muni d'une action *transitive* d'un groupe fini G. On pose
$$G_0 := \{g \in G,\ \forall x \in X,\ g \cdot x \neq x\}.$$
Montrer que $|G_0| \geq n - 1$ (en particulier, G_0 est non vide).

Exercice 6 - **(Quotient topologique)**

1. Soit $\varphi : X \to Y$ une bijection continue d'un espace topologique compact X dans un espace topologique Y séparé[2]. Montrer que φ est un homéomorphisme.
2. Soit X un espace topologique *séparé* muni d'une action *continue* d'un groupe *topologique* **compact**.
Pour tout x dans X, on munit l'espace $G/\mathrm{Stab(x)}$ de la topologie quotient. Montrer que l'application canonique
$$G/\mathrm{Stab(x)} \to \mathcal{O}_x$$
est un *homéomorphisme*.
Application : Montrer que l'on a un homéomorphisme
$$\mathrm{SO}(n)/\mathrm{SO}(n-1) \to \mathrm{S}^{n-1}.$$

1. G. Pólya (1887 — 1985), mathématicien hongrois.
2. C'est-à-dire tel que deux points distincts admettent des voisinages disjoints.

Exercice 7 - **(Algèbre linéaire.)**
Soit E un espace vectoriel de dimension finie $n \geq 1$ sur $\mathbf{C}$ et u un endomorphisme de E.

1. Comment appelle-t-on les orbites de l'action de $\mathrm{GL}(E)$ sur $\mathrm{End}(E)$ par conjugaison ? Donner un "élément réduit canonique" dans l'orbite de $u \in \mathrm{End}(E)$.
2. On considère l'action naturelle de $\mathrm{GL}(E)$ sur E. Décrire l'orbite d'un vecteur $v \in E$.
3. Pour quelles valeurs de k l'action de $\mathrm{GL}(E)$ sur $E \setminus \{0\}$ est-elle k-transitive ?
4. Pour $r \geq 1$, On considère l'action de $\mathrm{SL}(E)$ sur E^r par $f \cdot (v_1, \ldots, v_r) = (f(v_1), \ldots, f(v_r))$. Posons $U_r := \{(v_1, \ldots, v_r) \in E^r \mid \text{la famille } v_1, \ldots, v_r \text{ est linéairement indépendante dans } E\}$. Montrer que pour $r < n$, U_r est une orbite sous $\mathrm{SL}(E)$.
5. On note $\mathcal{F}(E)$ l'ensemble des fonctions de E dans $\mathbf{C}$, muni de sa structure naturelle d'espace vectoriel sur $\mathbf{C}$. Soit G un sous-groupe de $\mathrm{GL}(E)$. Pour $g \in G$, $f \in \mathcal{F}(E)$ et $v \in E$, on pose $(g \cdot f)(v) := f(g^{-1}v)$. Montrer que ceci définit bien une action de G sur $\mathcal{F}(E)$.
6. Soit $h \in \mathcal{F}(E)^G$ un invariant. Montrer que h est constante sur les orbites de E sous G. Réciproquement, toute fonction de $\mathcal{F}(E)$ invariante sur toutes les G-orbites est-elle dans $\mathcal{F}(E)^G$?

Exercice 8 - *Polynômes invariants.*
On considère l'action de $G = \mathbf{Z}/2\mathbf{Z} = \{1, \epsilon\}$ sur $\mathbf{C}[X_1, \ldots, X_n]$ par $\epsilon \cdot X_i = -X_i$. Montrer que $\mathbf{C}[X_1, \ldots, X_n]^G = \mathbf{C}[X_1^2, \ldots, X_iX_j, \ldots, X_n^2]$.