Homographies – birapport

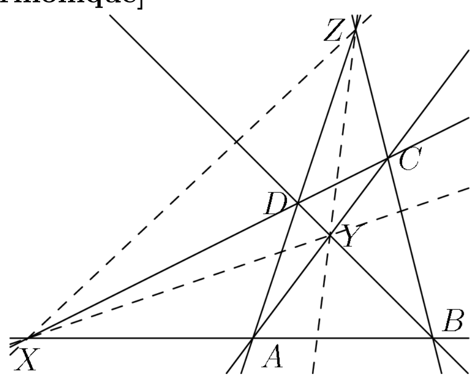
Exercice 1 -

1. Soient a, b, c, d quatre points distincts du plan complexe situés sur une même droite affine réelle D. Montrer que le birapport de a, b, c, d vus comme points de la complétion projective de D coïncide avec le birapport de a, b, c, d vus comme points de $\mathbf{P}^1(\mathbf{C})$. En déduire que cette dernière quantité est un nombre réel.
2. Plus généralement, montrer que quatre points du plan complexe sont cocycliques ou alignés si et seulement si leur birapport est un nombre réel.
   En déduire que les homographies de la droite projective complexe transforme un "cercle-droite" en un "cercle-droite".

Exercice 2 - **[Perspectives]**
Soient H et H' deux hyperplans distincts d'un espace projectif $\mathbf{P}(E)$ et soit m un point de $\mathbf{P}(E)$ situé ni sur H ni sur H'. Pour tout point x de H, soit $f(x)$ le point d'intersection de la droite mx et de H' (justifier). Montrer que la fonction $f : H \to H'$ ainsi définie est une homographie : on dit que f est la *perspective* de centre m de H sur H' (on dit parfois aussi *projection centrale*).

Exercice 3 - **[Quadrangle complet et division harmonique]**

Étant donnés trois points alignés X, A, B du plan affine, on effectue la construction suivante (à la règle seule) : on choisit une droite Δ passant par X, et deux points distincts C et D sur cette droite. On note Y, Z respectivement les intersections de AC et BD, AD et BC. On note X'_1 et X'_2 les intersections de YZ avec AB et CD.



1. Montrer que $[X, X'_1, A, B] = [X, X'_2, D, C] = [X, X'_1, B, A]$. Que peut-on en déduire sur la valeur de ce nombre ?
2. En déduire que le point X'_1 ainsi construit ne dépend pas des choix de Δ, C et D. Ce point est appelé *conjugué harmonique de* X par rapport aux points A et B.
3. Soient a, b, c trois points distincts d'une droite affine. Montrer que $[a, b, c, \infty] = -1$ si et seulement si c est le milieu du segment $[ab]$.
4. On dispose maintenant d'une règle (non graduée), et d'une droite parallèle à AB. Construire avec cette règle seulement le milieu du segment $[AB]$.
5. Montrer l'équivalence entre le théorème de Ceva :
$$\frac{\overline{X'_1A} \cdot \overline{CB} \cdot \overline{DZ}}{\overline{X'_1B} \cdot \overline{CZ} \cdot \overline{DA}} = -1$$
et celui de Menelaus
$$\frac{\overline{XA} \cdot \overline{CB} \cdot \overline{DZ}}{\overline{XB} \cdot \overline{CZ} \cdot \overline{DA}} = 1$$

Exercice 4 - **[Birapport de quatre droites]**
Soient D_1, D_2, D_3 et D_4 quatre droites d'un plan projectif passant par un même point O. Soit également Δ une droite ne passant pas par O, et m_i le point d'intersection $D_i \cap \Delta$ (i=1,..,4).

1. Montrer que le birapport $[m_1, m_2, m_3, m_4]$ ne dépend pas de la droite Δ : c'est par définition le birapport des droites D_1, D_2, D_3, D_4.
2. Montrer que $[D_1, D_2, D_3, D_4] = -1$ si et seulement si une droite parallèle à D_4 rencontre D_1, D_2, D_3 en des points A_1, A_2, A_3 tels que A_3 soit le milieu du segment $[A_1 A_2]$.

Exercice 5 - **[Axe d'une homographie]**
Soient Δ et Δ' deux droites distinctes du plan projectif et A, B, C trois points distincts sur Δ. Pour toute homographie h de la droite Δ dans la droite Δ', on note Δ_h la droite donnée par le théorème de Pappus appliqué aux points (A, B, C) et $(A' = h(A), B' = h(B), C' = h(C))$.
Soit D un point quelconque de Δ. La droite (DC') coupe Δ_h en un point X, et on note D' l'intersection de (CX) avec Δ'.

1. Montrer que $[A', B', C', D'] = [A, B, C, D]$.
2. En déduire que $D' = h(D)$.

Exercice 6 - Soient a, b, c, d, e cinq points distincts d'une droite projective. Montrer l'égalité

$$[a, b, c, d][a, b, d, e][a, b, e, c] = 1.$$

Exercice 7 - Soit $f : \mathbf{P}^1(\mathbf{C}) \to \mathbf{P}^1(\mathbf{C})$ une application ensembliste injective. Montrer que f est une homographie si et seulement si elle préserve le birapport.

Exercice 8 -

1. Quelles sont les homographies de la droite projective qui échangent 0 et ∞ et fixent 1 ? En déduire, sans calcul, que pour quatre points a, b, c, d on a

$$[b, a, c, d] = [a, b, c, d]^{-1}$$

   Montrer de même les autres symétries : $[a, b, d, c] = [a, b, c, d]^{-1}$ et $[a, c, b, d] = 1 - [a, b, c, d]$.
2. On pose $a_1 = \infty$, $a_2 = 0$, $a_3 = 1$ et $a_4 = t \in K$. Montrer que l'on définit un morphisme de groupes $\mathfrak{S}_4 \to \mathrm{PGL}(2, K)$ *via* la correspondance $\sigma \mapsto (t \mapsto [a_{\sigma(1)}, a_{\sigma(2)}, a_{\sigma(3)}, a_{\sigma(4)}])$. Quel est le noyau de ce morphisme ? Décrire le groupe image.

Exercice 9 - Soit $\mathbf{F}_q$ le corps à q éléments. En faisant agir $\mathrm{PGL}(2, \mathbf{F}_q)$ sur $\mathbf{P}^1(\mathbf{F}_q)$, construire un morphisme de groupes injectif

$$\mathrm{PGL}(2, \mathbf{F}_q) \hookrightarrow \mathfrak{S}_{q+1}.$$

Montrer que c'est un isomorphisme si $q = 2$ ou 3.