Examen final du 14 novembre 2011

2 heures

La correction tiendra grandement compte de la clarté et de la concision de la rédaction. Le sujet est composé de trois exercices indépendants. Au sein d'un exercice, le candidat peut admettre le résultat d'une question pour traiter les suivantes **s'il le précise explicitement**.

Exercice 1 - *Groupes finis.*
Soit G un groupe fini dont tous les éléments non triviaux ont le même ordre.

1. Montrer que cet ordre commun est un nombre premier p.
2. Montrer que G est un p-groupe.
   [**Indication :** Considérer les q–Sylow, pour $q \neq p$.]
3. Soit $Z(G)$ le centre de G. Montrer que $Z(G)$ n'est pas réduit au groupe trivial.
   [**Indication :** Considérer l'action de G sur lui-même par conjugaison.]
4. Montrer qu'il existe un entier $n \geq 1$ tel que $Z(G) \simeq (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^n$.
5. Montrer que si $|G| = p^2$, alors $G \simeq (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^2$.
6. **Un exemple :** On note $\mathbf{F}_3$ "le" corps à trois éléments. Soit [1] H le sous-groupe de $GL_3(\mathbf{F}_3)$ formé des matrices triangulaires supérieures de la forme suivante :

$$H := \left\{ \begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} , \ (a,b,c) \in \mathbf{F}_3^3 \right\}$$

   a) Montrer que tous les éléments non triviaux de H sont d'ordre 3.
   b) Déterminer (à isomorphisme près) les groupes $Z(H)$ et $H/Z(H)$.
   c) Le groupe H est-il isomorphe à $(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})^3$?

* *
*

Exercice 2 - *Homographies et birapport.*
Soit $\mathbb{P}^1$ la droite projective complexe.

1. Rappeler la définition du birapport de 4 points a, b, c et d de $\mathbb{P}^1$ et calculer le birapport des 4 points ∞, 0, -1 et 3.
2. Montrer que le birapport est réel si et seulement si les 4 points sont alignés ou cocycliques. On justifiera rapidement que les homographies transforment un cercle/droite en cercle/droite.

1. H comme Heisenberg, physicien théoricien allemand (1901 — 1976).

Exercice 3 - *Représentations du groupe diédral D_5.*

Soit D_5 le groupe diédral des isométries d'un pentagone régulier. On note σ la rotation d'angle $\frac{2\pi}{5}$ et τ une symétrie par rapport à la droite passant par un sommet et par le centre du pentagone. Le groupe D_5 est ainsi un sous-groupe de $\mathrm{O}(2,\mathbb{R})$.

1. Montrer qu'on a la relation $\tau\sigma\tau = \sigma^{-1}$.
2. Donner les 10 éléments de D_5 en fonction de σ et τ.
3. On rappelle que le groupe dérivé $D(G)$ d'un groupe G est le sous-groupe de G engendré par les commutateurs $xyx^{-1}y^{-1}$ avec $x, y \in G$. Déterminer le groupe dérivé $D(D_5)$ et montrer que le quotient $D_5/D(D_5)$ est isomorphe à $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.
4. Déterminer toutes les représentations de dimension 1 de D_5, c'est-à-dire les homomorphismes de D_5 dans $\mathbb{C}^*$.
   [**Indication :** Que vaut la restriction d'une telle représentation à $D(D_5)$?]
5. Donner les classes de conjugaison de D_5 en fonction de σ et τ.
6. On appelle U la représentation de dimension 2 donnée par l'inclusion
   $$U : D_5 \subset \mathrm{O}(2,\mathbb{R}) \subset \mathrm{GL}(2,\mathbb{C}).$$
   Vérifier que U est irréductible et calculer son caractère.
7. En déduire la table de caractères de D_5.

FIN DU SUJET