# Examen final du 4 novembre 2013

2 heures

*La correction tiendra grandement compte de la clarté et de la concision de la rédaction. Le sujet est composé de trois exercices indépendants. Au sein d'un exercice, le candidat peut admettre le résultat d'une question pour traiter les suivantes* **s'il le précise explicitement**.

**Exercice 1** -

Soit $G$ un groupe fini simple. Soit $X$ un ensemble fini de cardinal $n$ sur lequel $G$ agit non-trivialement.

1. Construire un homomorphisme injectif de $G$ dans le groupe symétrique $\mathfrak{S}_n$.
2. Soit $p$ un diviseur premier de l'ordre de $G$. Montrer que $n \geq p$.

* *
*

**Exercice 2** - *Représentations du groupe diédral $D_5$.*

Soit $D_5$ le groupe diédral des isométries d'un pentagone régulier. On note $\sigma$ la rotation d'angle $\frac{2\pi}{5}$ et $\tau$ une symétrie par rapport à la droite passant par un sommet et par le centre du pentagone. Le groupe $D_5$ est ainsi un sous-groupe de $\mathrm{O}(2, \mathbb{R})$.

1. Montrer qu'on a la relation $\tau\sigma\tau = \sigma^{-1}$.
2. Donner les 10 éléments de $D_5$ en fonction de $\sigma$ et $\tau$.
3. On rappelle que le groupe dérivé $D(G)$ d'un groupe $G$ est le sous-groupe de $G$ engendré par les commutateurs $xyx^{-1}y^{-1}$ avec $x, y \in G$. Déterminer le groupe dérivé $D(D_5)$ et montrer que le quotient $D_5/D(D_5)$ est isomorphe à $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.
4. Déterminer toutes les représentations de dimension 1 de $D_5$, c'est-à-dire les homomorphismes de $D_5$ dans $\mathbb{C}^*$.
   [**Indication :** Que vaut la restriction d'une telle représentation à $D(D_5)$ ?]
5. Donner les classes de conjugaison de $D_5$ en fonction de $\sigma$ et $\tau$.
6. On appelle $U$ la représentation de dimension 2 donnée par l'inclusion
   $$U : D_5 \subset \mathrm{O}(2, \mathbb{R}) \subset \mathrm{GL}(2, \mathbb{C}).$$
   Vérifier que $U$ est irréductible et calculer son caractère.
7. En déduire la table de caractères de $D_5$.

* *
*

**Exercice 3** - Soit $G$ un groupe d'ordre 30. Soient $P$ un 3-Sylow et $Q$ un 5-Sylow de $G$.

1. Montrer que $P \cap Q = \{1\}$.
2. Soit $n_3$ (resp. $n_5$) le nombre de 3-Sylow (resp. 5-Sylow) de $G$. Montrer que $n_3 = 1$ ou $n_5 = 1$.
   *Indication : Dans le cas $n_3 \neq 1$ et $n_5 \neq 1$ compter le nombre d'éléments d'ordre 3 et d'ordre 5 de $G$.*
3. En utilisant (2) montrer que $P$ ou $Q$ est distingué. En déduire que l'ensemble
   $$H = \{xy \mid x \in P, y \in Q\}$$
   est un sous-groupe de $G$.
4. Montrer que $H$ est isomorphe à $\mathbb{Z}/15\mathbb{Z}$.
   *Indication : On a vu en cours que les groupes d'ordre $pq$ avec $p < q$ et $p$ ne divisant pas $q-1$ sont abéliens.*
5. Montrer que $H$ est distingué dans $G$ et que $G$ est un produit semi-direct $\mathbb{Z}/15\mathbb{Z} \rtimes_\phi \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ avec $\phi : \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \to \mathrm{Aut}(\mathbb{Z}/15\mathbb{Z})$.
   Combien existe-t-til de tels $\phi$ ?
   Donner un homomorphisme $\phi$ tel que $\mathbb{Z}/15\mathbb{Z} \rtimes_\phi \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \simeq \mathbb{Z}/30\mathbb{Z}$.

Fin du sujet