Groupes abéliens

Exercice 1 -

1. Soit G un groupe dont tous les sous-groupes sont distingués. G est-il abélien ?
2. Soit G un groupe dont tous les éléments sont d'ordre fini. G est-il fini ?

Exercice 2 - **[Groupes abéliens de type fini]**

1. Rappeler le théorème de structure des groupes abéliens de type fini.
2. Donner un exemple de groupe abélien qui n'est pas de type fini.
3. Déterminer à isomorphisme près tous les groupes abéliens d'ordre 12 et 72.
4. Soient $n, m \geq 1$ deux entiers. On note $\delta := \mathrm{pgcd}(n, m)$ et $\mu := \mathrm{ppcm}(n, m)$. Montrer l'isomorphisme de groupes
$$\mathbf{Z}/n\mathbf{Z} \times \mathbf{Z}/m\mathbf{Z} \approx \mathbf{Z}/\delta\mathbf{Z} \times \mathbf{Z}/\mu\mathbf{Z}.$$
5. Soient $n \geq 1$ et $\varphi : \mathbf{Z}^n \to \mathbf{Z}^n$ un morphisme surjectif. Montrer que φ est bijectif.
6. Déterminer la structure des groupes abéliens de type fini suivants :
$$\mathbf{Z}^2/\langle(1,3),(2,0)\rangle \qquad \mathbf{Z}^2/\langle(1,1),(1,-1)\rangle.$$

Exercice 3 - Soit G un groupe fini.

1. On suppose que $G/Z(G)$ est cyclique. Montrer que G est abélien.
2. En déduire, à isomorphisme près, les groupes d'ordre p^2 (p premier).

Exercice 4 - Soit G un groupe fini (non nécessairement commutatif). On note $D(G)$ le sous-groupe de G engendré par les commutateurs (c'est-à-dire les éléements de la forme $ghg^{-1}h^{-1}$, $g, h \in G$).

1. Monter que $D(G)$ est un sous-groupe distingué de G.
2. Montrer que le quotient $G/D(G)$ est abélien. C'est même le plus gros quotient abélien de G au sens où il vérifie la propriété universelle suivante : tout morphisme $\varphi : G \to A$ dans un groupe abélien A se factorise par la projection canonique $G \to G/D(G)$. $G/D(G)$ s'appelle l'abélianisé de G et se note parfois G_{ab}.
3. Calculer les abélianisés de $\mathfrak{S}_n$,

Exercice 5 - **[Utilisation sophistiquée de Sylow]**

1. Montrer qu'un groupe d'ordre 12 n'est pas simple.
   [**Indication :** S'il y a plusieurs 3-Sylow, quelle place reste-t-il pour le 2 Sylow ?]
2. Montrer qu'un groupe d'ordre 36 n'est pas simple.
   [**Indication :** Faire agir le groupe sur ses 3–Sylow.]
3. Montrer qu'un groupe d'ordre p^2q n'est pas simple.
   [**Indication :** Distinguer suivant les valeurs du nombre n_q de q–Sylow.]

Exercice 6 - Soit G un groupe et S un 2–Sylow. On suppose S cyclique et $|G| > 2$. Montrer que G n'est pas simple.
[**Indication :** Construire un morphisme de groupe $G \to \mathfrak{S}(G)$ en faisant agir G sur lui-même par translation. Montrer que ce morphisme n'est pas trivial en calculant la signature de la permutation induite par un générateur de S.]

Exercice 7 - Soit G un groupe d'ordre pair.
Montrer que G contient un élément d'ordre exactement deux.

Exercice 8 - Soit G un groupe fini. On note p le plus petit facteur premier de $|G|$. Soit H un sous-groupe de G d'indice p. Montrer que H est distingué dans G.

Exercice 9 -

1. Soit G un groupe de cardinal 24. On suppose qu'aucun des Sylow (pour $p = 2, 3$) n'est distingué. En faisant agir G sur ses 3-Sylow, montrer que G est isomorphe à $\mathfrak{S}_4$.
2. Soit G un groupe simple d'ordre 60. Montrer que G est isomorphe à $\mathfrak{A}_5$.

Exercice 10 - **[Retour sur les produits semi-directs]**
Soient N et H deux groupes et $\varphi, \psi : H \to \mathrm{Aut}(N)$ deux morphismes. Montrer que chacune des conditions suivante entraîne que les groupes $N \rtimes_\varphi H$ et $N \rtimes_\psi H$ sont isomorphes.

1. Il existe $\alpha \in \mathrm{Aut}(H)$ tel que $\psi = \varphi \circ \alpha$.
2. Il existe $u \in \mathrm{Aut}(N)$ tel que
$$\forall h \in H, \psi(h) = u\varphi(h)u^{-1}.$$

Exercice 11 - **[Automorphismes de $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$]**

1. Montrer que le groupe $\mathrm{Aut}(\mathbf{Z}/n\mathbf{Z})$ est isomorphe au groupe $((\mathbf{Z}/n\mathbf{Z})^\times, \times)$ des éléments inversibles de l'anneau $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$.
2. Quel est le groupe $(\mathbf{Z}/p\mathbf{Z})^\times$ pour p premier ?
3. En déduire la classification des groupes d'ordre pq avec $p < q$ premiers.
[**Indication** : Montrer que le q–Sylow est distingué, que G se décompose en produit semi-direct et utiliser l'exercice 10(1) pour reconnaître les produits semi-directs isomorphes lorsque $p \mid q - 1$.]

Exercice 12 - Déterminer à isomorphime près tous les groupes finis de cardinal inférieur ou égal à 15 (pour les cardinaux 8 et 12, voir le développement associé à ce thème !).