Groupes distingués, groupes quotients, produits semi-directs

Exercice 1 - Soit G un groupe.

1. Soit H un sous-groupe d'indice 2 de G. Montrer que H est distingué dans G.
2. Montrer qu'un groupe de cardinal 63 ou 255 n'est jamais simple.
3. Soit $H \subset G$ un sous-groupe de cardinal n. On suppose que H est le seul sous-groupe de G de cardinal n. Montrer que H est distingué dans G.
4. Soit G un groupe, H un sous-groupe de G, $C(H)$ le centralisateur de H dans G. Montrer que si H est distingué dans G, alors $C(H)$ aussi.
5. Soit G un groupe simple et φ morphisme de G dans un groupe H. Montrer que φ est ou bien injectif, ou bien trivial (*i.e.* $\varphi(g) = e$ pour tout $g \in G$).

Exercice 2 - **[Groupe quotient]**

1. Soit $H \lhd G$ des groupes. Montrer que $G \to G/H$ est surjective et déterminer son noyau. Réciproquement, soit Q un groupe et $\varphi : G \to Q$ un morphisme de groupes surjectif. Montrer que Q est isomorphe à un quotient de G.
2. **[Propriété universelle du quotient].** Soient $H \lhd G$ et K des groupes. Montrer que l'ensemble des morphismes de groupes de G/H dans K est en bijection avec l'ensemble des des morphismes de groupes de G dans K dont la restriction à H est triviale.

Exercice 3 - **[Normalisateur]**

Soient G un groupe et H un sous-groupe. On appelle normalisateur de H dans G et l'on note N_H le sous-ensemble de G formé des éléments $x \in G$ tels que $xHx^{-1} = H$.

1. Montrer que N_H est un sous-groupe de G et que H est distingué dans N_H.
2. Montrer que N_H est le plus grand sous-groupe de G dans lequel H est distingué.
3. Soit K un sous-groupe de N_H. Montrer que HK est un groupe et que H est distingué dans HK.
4. Soient H et K deux sous-groupes de G. Montrer que HK est un groupe si et seulement si $HK = KH$.

Exercice 4 - **[Des lemmes d'isomorphisme]**

Soit G un groupe.

1. Soient H et K deux sous-groupes de G. On suppose que H est contenu dans le normalisateur N_K de K dans G (*c.f.* exercice 3). Montrer que $H \cap K$ est un sous-groupe distingué de H. Montrer que $H/(H \cap K)$ est isomorphe à HK/K.
2. Soient H et K deux sous-groupes distingués de G ; on suppose que K est contenu dans H. Montrer que K est distingué dans H. Montrer que $(G/K)/(H/K)$ est isomorphe à G/H.

Exercice 5 - Soit G un groupe et $Z(G)$ son centre.

1. Montrer que $Z(G)$ est distingué dans G.
2. On suppose que le groupe quotient $G/Z(G)$ est cyclique. Montrer que G est abélien.
3. En déduire la classification à isomorphisme près des groupes d'ordre p^2 (p premier).

Exercice 6 - **[Utilisation sophistiquée de Sylow]**

1. Montrer qu'un groupe d'ordre 12 n'est pas simple.
   [**Indication :** S'il y a plusieurs 3–Sylow, quelle place reste-t-il pour le 2–Sylow ?]
2. Montrer qu'un groupe d'ordre 36 n'est pas simple.
   [**Indication :** Faire agir le groupe sur ses 3–Sylow.]
3. Montrer qu'un groupe d'ordre p^2q n'est pas simple.
   [**Indication :** Distinguer suivant les valeurs du nombre n_q de q–Sylow.]

Exercice 7 - Soit G un groupe de cardinal 24. On suppose qu'aucun des Sylow (pour $p = 2, 3$) n'est distingué. En faisant agir G sur ses 3–Sylow, montrer que G est isomorphe à $\mathfrak{S}_4$.

Exercice 8 - Soit G un groupe et S un 2–Sylow. On suppose S cyclique et $|G| > 2$. Montrer que G n'est pas simple.
[**Indication :** Construire un morphisme de groupe $G \to \mathfrak{S}(G)$ en faisant agir G sur lui-même par translation. Montrer que ce morphisme n'est pas trivial en calculant la signature de la permutation induite par un générateur de S.]

Exercice 9 - Soit G un groupe et H un sous-groupe de G non nécessairement distingué.

1. Montrer que l'action de G sur G/H par translation à gauche n'est pas fidèle.
2. On suppose G infini et H distinct de G et d'indice fini. Montrer que G n'est pas simple.
3. On suppose G fini. Soit p le plus petit facteur premier de $|G|$ et supposons H d'indice p. Montrer que H est distingué dans G.
4. On suppose G fini. Soit p le plus petit facteur premier de $|G|$ et supposons H d'ordre p, distingué dans G. Montrer que H est central ($i.e$ $H \subset Z(G)$).

Exercice 10 - **[Produits semi-directs]**

1. Rappeler pourquoi $\mathfrak{A}_n$ est distingué dans $\mathfrak{S}_n$. Montrer que l'on a une décomposition en produit semi-direct
   $$\mathfrak{S}_n \simeq \mathfrak{A}_n \rtimes \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}.$$
   Retrouver que le groupe symétrique $\mathfrak{S}_3$ et le groupe diédral D_3 sont isomorphes.
2. Soit E un ensemble à 4 éléments. Combien y a-t-il de façons de partitionner E en deux ensembles de deux éléments chacun. En déduire un morphisme de groupes $\mathfrak{S}_4 \to \mathfrak{S}_3$.
   Montrer que l'on a une décomposition en produit semi-direct
   $$\mathfrak{S}_4 \simeq V \rtimes \mathfrak{S}_3,$$
   où $V = (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \times (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ est le *groupe de Klein.*
   Pour quelles valeurs de n existe-t-il un morphisme de groupes surjectif $\mathfrak{S}_n \to \mathfrak{S}_{n-1}$?

Exercice 11 - **[Isomorphismes entre produits semi-directs]**
Soient N et H deux groupes et $\varphi, \psi : H \to \mathrm{Aut}(N)$ deux morphismes. Montrer que chacune des conditions suivante entraîne que les groupes $N \rtimes_\varphi H$ et $N \rtimes_\psi H$ sont isomorphes.

1. Il existe $\alpha \in \mathrm{Aut}(H)$ tel que $\psi = \varphi \circ \alpha$.
2. Il existe $u \in \mathrm{Aut}(N)$ tel que
   $$\forall h \in H, \psi(h) = u\varphi(h)u^{-1}.$$