Groupe symétrique

Pour tout ensemble E, on note $\mathfrak{S}(E)$ le groupe des permutations de E. Lorsque $E = \{1, \ldots, n\}$, on note ce groupe $\mathfrak{S}_n$. On note $\mathfrak{A}(E)$ (resp. $\mathfrak{A}_n$) le sous-groupe (distingué !) de $\mathfrak{S}(E)$ (resp. de $\mathfrak{S}_n$) constitué des éléments de signature 1.

Exercice 1. — Soient $n \geqslant 1$ un entier, σ un élément de $\mathfrak{S}_n$ et $H := \langle\sigma\rangle \subset \mathfrak{S}_n$ le sous-groupe engendré par σ. Quelles sont les orbites de l'action de H sur l'ensemble $\{1, \ldots, n\}$?
Application numérique : décomposer en produit de cycles à supports disjoints la permutation suivante :

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 3 & 6 & 5 & 2 & 8 & 4 & 7 & 1 \end{pmatrix}.$$

Comment déterminer l'ordre d'une permutation σ à partir d'une telle décomposition ?
Que dire de la décomposition de σ^2 en fonction de celle de σ ?

Exercice 2. — Soit n un entier.

a) Montrer que pour $n \geqslant 3$ le groupe $\mathfrak{S}_n$ n'est pas commutatif. Quel est son centre ?

b) Pour $k \leqslant n$, quel est le centralisateur (on dit aussi commutant) d'un k-cycle de $\mathfrak{S}_n$? Vérifier que ce groupe est isomorphe à $\mathbf{Z}/k \times \mathfrak{S}_{n-k}$.

c) Quel est le centralisateur de (12)(34) dans $\mathfrak{S}_4$?

Exercice 3. — **Générateurs du groupe symétrique**

a) Montrer que la famille des transpositions $\{(i,j)\}_{1 \leqslant i \neq j \leqslant n}$ engendrent $\mathfrak{S}_n$.

b) Montrer que l'on peut même se limiter à la famille de générateurs $\{(1,2), (1,3), \ldots, (1,n)\}$.

c) De même, montrer que l'on peut se limiter à la famille $\{(1,2), (2,3), \ldots, (n-1,n)\}$.

d) Montrer que le n–cycle $(1, 2, \ldots, n)$ et la transposition $(1, 2)$ engendrent $\mathfrak{S}_n$.

e) Montrer que pour $n \geqslant 3$ les 3-cycles engendrent $\mathfrak{A}_n$. En déduire le groupe dérivé de $\mathfrak{S}_n$.

f) Montrer que pour $n \geqslant 5$ $\mathfrak{A}_n$ est engendré par les produits de deux transpositions à supports disjoints.

g) Montrer que $\mathfrak{A}_n$ est engendré par les carrés d'éléments de $\mathfrak{S}_n$.
Tout élément de $\mathfrak{A}_n$ est-il le carré d'un élément de $\mathfrak{S}_n$?
[**Indication:** Utiliser une décomposition en produits de cycles à supports disjoints, *cf* ex. *1*.]

Exercice 4. — **Classes de conjugaison**

1. Soit $\gamma = (\gamma_1, \ldots, \gamma_p)$ un cycle et σ une autre permutation de $\mathfrak{S}_n$. Décrire la permutation $\sigma\gamma\sigma^{-1}$. En déduire les classes de conjugaison d'éléments de $\mathfrak{S}_n$.
Combien y a-t-il de classes de conjugaison dans $\mathfrak{S}_4$, $\mathfrak{S}_5$, $\mathfrak{S}_6$?
2. Montrer que l'action de $\mathfrak{A}_n$ sur $\{1, \ldots, n\}$ est $(n-2)$–transitive.
En déduire que pour $n \geqslant 5$, les 3-cycles sont conjugués dans $\mathfrak{A}_n$. Qu'en est-il pour $n \leqslant 4$?
3. Soit $\sigma \in \mathfrak{A}_n$. On note $\mathrm{Conj}^{\mathfrak{S}_n}$ sa classe de conjugaison dans $\mathfrak{S}_n$ et $\mathrm{Conj}^{\mathfrak{A}_n}$ celle dans $\mathfrak{A}_n$.
Montrer que $\frac{|\mathrm{Conj}^{\mathfrak{S}_n}|}{|\mathrm{Conj}^{\mathfrak{A}_n}|} \in \{1, 2\}$.
[**Indication:** Si H, K sont des sous-groupes de G avec H d'indice fini, on a $[K : K \cap H] \leqslant [G : H]$.]
Montrer que l'on a $\frac{|\mathrm{Conj}^{\mathfrak{S}_n}|}{|\mathrm{Conj}^{\mathfrak{A}_n}|} = 2$ si et seulement si l'écriture de σ en produits de cycles à supports disjoints ne fait intervenir que des cycles d'ordres impairs (y compris 1) et ces ordres sont deux à deux distincts.
En pratique, si σ_1 et σ_2 sont deux telles permutations, il existe $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ qui conjugue l'une sur l'autre. Montrer que σ_1 et σ_2 sont conjuguées dans $\mathfrak{A}_n$ si et seulement si $\sigma \in \mathfrak{A}_n$.

Exercice 5. — Soient $n \geqslant 1$ un entier et $A := k[X_1, \dots, X_n]$ l'algèbre des polynômes à n indéterminées. muni de l'action naturelle du groupe symétrique $\mathfrak{S}_n$.
Quel est le cardinal de l'orbite d'un monôme $X_1^{i_1} \dots X_n^{i_n}$ ($i_1, \dots i_n$ des entiers $\geqslant 0$) ?

Exercice 6. — Déterminer l'ensemble des morphismes de groupes de $\mathfrak{S}_n \to \mathbf{Z}/2$.

Exercice 7. — Combien y a-t-il de façons de partitionner $\{1, 2, 3, 4\}$ en deux ensembles de deux éléments chacun ? En déduire un morphisme de groupes *surjectif* $\mathfrak{S}_4 \to \mathfrak{S}_3$. Quel est son noyau ?
Montrer que l'on a une décomposition en produit semi-direct

$$\mathfrak{S}_4 \cong V \rtimes \mathfrak{S}_3,$$

où $V = (\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}) \times (\mathbf{Z}/2\mathbf{Z})$ est le *groupe de Klein.*
Pour quelles valeurs de n existe-t-il un morphisme de groupes surjectif $\mathfrak{S}_n \to \mathfrak{S}_{n-1}$?

Exercice 8. — Soit $n \geqslant 5$ un entier et H un sous-groupe de $\mathfrak{S}_n$ *différent* de $\mathfrak{A}_n$. Montrer que l'indice $[\mathfrak{S}_n : H]$ est supérieur ou égal à n. Montrer de plus que si l'on a l'égalité $[\mathfrak{S}_n : H] = n$ alors $H \cong \mathfrak{S}_{n-1}$.
[**Indication:** Considérer l'action de $\mathfrak{S}_n$ sur l'ensemble $\mathfrak{S}_n/H$.]

Exercice 9. — **Le groupe des isométries du tétraèdre**
Soit T un tétraèdre régulier centré en l'origine de l'espace euclidien. On note $\mathcal{I}$ le groupe des isométries affines préservant T.

a) En faisant agir $\mathcal{I}$ sur l'ensemble des sommets de T, construire une injection de $\mathcal{I}$ dans $\mathfrak{S}_4$. Montrer que l'injection précédente est un isomorphisme :

$$\mathcal{I} \cong \mathfrak{S}_4.$$

b) Quel est le morphisme composé $\mathfrak{S}_4 \cong \mathcal{I} \xrightarrow{\text{dét}} \mathbf{Z}/2$? En déduire le groupe des isométries positives de T.

Exercice 10. — **Le groupe des isométries du cube**
Soit $C \subset \mathbf{R}^3$ un cube centré en 0. On note $\mathcal{I}_C$ le groupe des isométries de C.

a) Montrer que $\mathcal{I}_C$ est un sous-groupe de $\mathrm{O}(3)$. On note alors $\mathcal{I}_C^+ := \mathcal{I}_C \cap \mathrm{SO}(3)$.

b) Montrer que $\mathcal{I}_C$ opère sur l'ensemble à 4 éléments formé des grandes diagonales de C. On note $\varphi : \mathcal{I}_C \to \mathfrak{S}_4$ le morphisme associé.

c) Montrer que $\ker \varphi = \{\pm \mathrm{id}\}$.

d) Montrer que φ est surjective.

e) Montrer que le morphisme $\varphi \times \text{dét} : \mathcal{I}_C \to \mathfrak{S}_4 \times \mathbf{Z}/2$ est un isomorphisme.

f) Montrer que φ induit un isomorphisme entre $\mathcal{I}_C^+$ et $\mathfrak{S}_4$.

g) Remarquer qu'il y a deux tétraèdres réguliers T_1 et T_2 inscrits dans C (leurs arêtes sont les diagonales des faces de C). On note $\mathcal{I}_{T_1}$ et $\mathcal{I}_{T_2}$ leurs groupes d'isométries respectifs. Montrer que $\mathcal{I}_{T_1} = \mathcal{I}_{T_2}$ est un sous-groupe distingué de $\mathcal{I}_C$ isomorphe à $\mathfrak{S}_4$. Montrer qu'il n'est pas conjugué à $\mathcal{I}_C^+$.

Exercice 11. — Soit G un groupe fini. On rappelle qu'en faisant agir G sur lui-même, on obtient un morphisme de groupes injectif $\varphi : G \hookrightarrow \mathfrak{S}(G)$.
A quelle condition l'image de φ est-elle contenue dans le groupe alterné $\mathfrak{A}(G)$?

Exercice 12. — Dresser la liste de *tous* (pas juste à isomorphisme près) les sous-groupes du groupe $\mathfrak{S}_3$ et du groupe $\mathfrak{S}_4$.