Réseaux et groupe modulaire

Exercice 1 - [Bord du domaine fondamental et points fixes].
Soit $D = \{z \in \mathbf{C}, |\Re(z)| \leq \frac{1}{2} \text{ et } |z| \geq 1\}$ le domaine fondamental de l'action du groupe modulaire $\mathrm{PSL}_2(\mathbf{Z})$ sur le demi-plan supérieur $\mathcal{H} := \{z \in \mathbf{C}, \Im(z) > 0\}$. Il a été vu en cours que $\bigcup_{g \in \mathrm{PSL}_2(\mathbf{Z})} g(D)$ recouvrait $\mathcal{H}$

1. Pour quels couples d'éléments $(g \in \mathrm{PSL}_2(\mathbf{Z}), z \in D)$ a-t-on $g \cdot z \in D$?
   [**Indication :** Soit $(g = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}, z)$ un (représentant d'un) tel couple. Se ramener au cas où $\Im(g \cdot z) \geq \Im(z)$. Montrer qu'alors $|c| \leq 1$. Analyser le cas $c = 0$ et montrer qu'alors g est une translation. Si $c = 1$, montrer qu'alors $|d| \leq 1$ et analyser. Ramener le cas $c = -1$ à celui $c = 1$.]
2. Quels sont les points fixes de l'action de $\mathrm{PSL}_2(\mathbf{Z})$ sur D ? Déterminer les stabilisateurs associés.

Exercice 2 - [Sous-groupes discrets de $\mathbf{R}^n$]
Soit V un $\mathbf{R}$ espace vectoriel de dimension finie (muni de sa topologie canonique). On appelle réseau de V un sous-groupe de V de la forme $\mathbf{Z}v_1 \oplus \cdots \oplus \mathbf{Z}v_n$ avec $(v_1, \ldots, v_n)$ une base de V. On appelle sous-réseau de V un sous-groupe de V qui est un réseau d'un sous espace vectoriel $W \subset V$.

1. Donner un exemple de sous-groupe de $\mathbf{R}^n$ de la forme $\mathbf{Z}v_1 \oplus \cdots \oplus \mathbf{Z}v_n$ qui n'est pas un sous-réseau.
2. Soit Γ un réseau de V et $\Lambda \subset \Gamma$ un sous-groupe. Montrer que Λ est un sous-réseau de V.
3. Montrer que tout sous-groupe discret de V est un sous-réseau de V.
4. Montrer qu'un sous-groupe $\Gamma \subset V$ est un réseau si et seulement si Γ est discret et cocompact (c'est-à-dire tel que V/Γ soit compact).

Exercice 3 - [Réseaux de $\mathbf{C}$]
On considère $\mathbf{C}$ en tant que $\mathbf{R}$ espace vectoriel. On note $\mathcal{R}$ l'ensemble des réseaux de $\mathbf{C}$ (*c.f.* exercice 2) et $\mathcal{B}_+ := \{(\omega_1, \omega_2) \in (\mathbf{C}^*)^2, \ \frac{\omega_1}{\omega_2} \in \mathcal{H}\}$ l'ensemble des bases directes.

1. Pour tout $(\omega_1, \omega_2) \in \mathcal{B}_+$, on note $\Gamma(\omega_1, \omega_2)$ le réseau $\mathbf{Z}\omega_1 \oplus \mathbf{Z}\omega_2$ de $\mathbf{C}$. Montrer que l'application $\Gamma : \mathcal{B}_+ \to \mathcal{R}$ ainsi définie est surjective.
2. Vérifier que l'on définit une action de $\mathrm{SL}_2(\mathbf{Z})$ sur $\mathcal{B}_+$ « *via* la formule » :
$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \cdot (\omega_1, \omega_2) := (a\omega_1 + b\omega_2, c\omega_1 + d\omega_2).$$
3. Montrer que l'on a une bijection $\mathcal{R} \simeq \mathcal{B}_+/\mathrm{SL}_2(\mathbf{Z})$.
4. Vérifier que le groupe $\mathbf{C}^*$ opère sur $\mathcal{B}_+$ et sur $\mathcal{R}$ « *via* les formules » :
$$\lambda \cdot (\omega_1, \omega_2) := (\lambda\omega_1, \lambda\omega_2) \quad \text{et} \quad \lambda \cdot \Gamma = \lambda\Gamma.$$
   Montrer que l'on a des bijections $\mathcal{B}_+/\mathbf{C}^* \simeq \mathcal{H}$ et $\mathcal{R}/\mathbf{C}^* \simeq \mathcal{H}/\mathrm{PSL}_2(\mathbf{Z})$.