Sous-groupes de $\mathbf{R}^n$

Exercice 1. — **Sous-groupes de $(\mathbf{R}, +)$**
Soit G un sous-groupe de $\mathbf{R}$. Montrer qu'on a l'alternative suivante :
– soit G est dense dans $\mathbf{R}$
– soit il existe un réel $\omega > 0$ tel que $G = \omega\mathbf{Z} := \{\omega n,\ n \in \mathbf{Z}\}$.

Application : groupe des périodes. Pour toute fonction $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, on pose

$$\mathcal{P}_f := \{T \in \mathbf{R} \quad | \quad f(x+T) = f(x) \quad \forall x \in \mathbf{R}\} \qquad .$$

a) Montrer que $(\mathcal{P}_f, +)$ est un sous groupe de $(\mathbf{R}, +)$.

On dit que f est périodique lorsque $\mathcal{P}_f \neq \{0\}$.

b) Donner des exemples de fonctions f telles que l'on ait :

$$\mathcal{P}_f = \mathbf{R}; \qquad \mathcal{P}_f = \{0\}; \qquad \mathcal{P}_f = 2\pi\mathbf{Z}; \qquad \mathcal{P}_f = \mathbf{Z}; \qquad \mathcal{P}_f = \mathbf{Q}.$$

c) Soit $h : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ une application continue périodique *non constante*. Montrer qu'il existe un réel $\omega > 0$ tel que l'on ait $\mathcal{P}_h = \omega\mathbf{Z}$.

Dans la suite, $\omega_1 > 0$ et $\omega_2 > 0$ deux réels fixés et l'on pose $q := \frac{\omega_1}{\omega_2}$.

d) Soit h une application *continue* $h : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ telle que l'on ait

$$\forall x \in \mathbf{R}, \quad h(x) = h(x + \omega_1) = h(x + \omega_2) \qquad .$$

Montrer que si $q \notin \mathbf{Q}$ alors h est constante.

Dans la suite, soient h_1 et h_2 deux fonctions continues telles que $\mathcal{P}_{h_1} = \omega_1\mathbf{Z}$ et $\mathcal{P}_{h_2} = \omega_2\mathbf{Z}$.

e) Montrer que $h_1 + h_2$ est périodique ssi $q \in \mathbf{Q}$.
[**Indication:** Dans le sens direct, si T est une période de $h_1 + h_2$, considérer la fonction $x \mapsto h_1(x+T) - h_1(x)$.]

f) Montrer que si $q \notin \mathbf{Q}$, alors

$$\sup_{\mathbf{R}}(h_1 + h_2) = \sup_{\mathbf{R}} h_1 + \sup_{\mathbf{R}} h_2.$$

[**Indication:** Si $h_i(x_i) = \sup h_i (i = 1, 2)$, montrer qu'il existe des suites d'entiers p_n et q_n tels que $p_n\omega_1 + q_n\omega_2 \underset{n\to\infty}{\to} x_1 - x_2$.]

Exercice 2. — **Sous-groupes discrets [(1)] de $(\mathbf{R}^n, +)$**
Soit G un sous-groupe *discret* de $\mathbf{R}^n$. Le but de l'exercice est de montrer que G est un groupe abélien libre.

a) Que signifie que G est discret ?

b) Expliquer pourquoi il suffit de montrer que G est de type fini.

c) Si $G \neq \{0\}$, soit $g \neq 0$ un élément de G. Montrer que $H := G \cap \mathbf{R}g$ est un sous-groupe discret de $\mathbf{R}$.

d) Question inutile : l'ensemble des premières coordonnées des éléments de G forme-t-il en général un sous-groupe discret de $\mathbf{R}$?

1. Comparer avec Gonnord-Tosel, *Topologie et analyse fonctionnelle* p.11.

e) Montrer que G/H s'identifie à un sous-groupe discret de $\mathbf{R}^n/\mathbf{R}g$ et conclure.
[**Indication:** Justifier et utiliser que dans $\mathbf{R}^n$, $B(0, \|g\|) \cap G$ est fini].

f) Que peut-on dire du rang de G ?