Actions de groupes

Exercice 1. — Soit X un ensemble sur lequel opère un groupe G.

a) Pour $g \in G$ et $x \in X$, comparer Stab_x et $\mathrm{Stab}_{g\cdot x}$.

b) Montrer qu'un sous-ensemble $Y \subset X$ est stable sous l'action de G si et seulement si Y est réunion d'orbites.

c) Pour $X = G/H$, montrer que $\mathrm{Stab}_{[g]} = gHg^{-1}$.

d) A quelle condition l'action de G sur lui-même par conjugaison est-elle fidèle ?

Exercice 2. — **Algèbre linéaire**
Soient E un espace vectoriel de dimension finie $n \geqslant 1$ sur un corps k et $u \in \mathcal{L}(E)$.

a) On considère l'action naturelle de $\mathrm{GL}(E)$ sur E. Décrire l'orbite d'un vecteur $v \in E$.

b) Pour quelles valeurs de k l'action de $\mathrm{GL}(E)$ sur $E \setminus \{0\}$ est-elle k-transitive ?

c) Comment appelle-t-on les orbites de l'action de $\mathrm{GL}(E)$ sur $\mathrm{End}(E)$ par conjugaison ? Si k est algébriquement clos, donner un représentant privilégié de chaque orbite.

d) Décrire les orbites de l'action $\mathrm{GL}(E) \times \mathrm{GL}(E)$ sur $\mathrm{L}(E)$ par "équivalence" (c'est-à-dire telle que $(u, v) \cdot f := u \circ f \circ v^{-1}$).

e) Pour $r \geqslant 1$, On considère l'action de $\mathrm{SL}(E)$ sur E^r par $f \cdot (v_1, \ldots, v_r) = (f(v_1), \ldots, f(v_r))$. Posons $U_r := \{(v_1, \ldots, v_r) \in E^r \mid \text{la famille } v_1, \ldots, v_r \text{ est linéairement indépendante dans } E\}$. Montrer que pour $r < n$, U_r est une orbite sous $\mathrm{SL}(E)$.

f) On note $\mathcal{F}(E)$ l'ensemble des fonctions de E dans k, muni de sa structure naturelle d'espace vectoriel. Soit G un sous-groupe de $\mathrm{GL}(E)$. Pour $g \in G$, $f \in \mathcal{F}(E)$ et $v \in E$, on pose $(g \cdot f)(v) := f(g^{-1}v)$. Montrer que ceci définit bien une action de G sur $\mathcal{F}(E)$.

g) Soit $\mathcal{F}$ l'ensemble des *drapeaux* de E, c'est-à-dire l'ensemble des $(n+1)$*uplets* de sev de E $(F_0 \subset F_1 \cdots \subset F_n)$ tels que $\dim F_i = i\ \forall i$. Montrer que l'action de $\mathrm{GL}(E)$ sur $\mathcal{F}$ est transitive.

Exercice 3. — On considère l'action naturelle du groupe diédral D_{2n} sur l'ensemble des sommets d'un polygone régulier à n côtés.

a) Montrer que cette action est fidèle.

b) Pour $n = 3$, en déduire un isomorphisme $D_6 \cong \mathfrak{S}_3$.

c) Pour $n = 4$, écrire le morphisme $D_8 \to \mathfrak{S}_4$ associé.

Exercice 4. — Soit E un $\mathbf{F}_q$–ev de dimension finie n. Pour $0 \leqslant d \leqslant n$, combien E possède-t-il de sev de dimension d ?
[**Indication:** Considérer l'action de $\mathcal{GL}(E)$ sur l'ensemble des sev de dimension d de E. Quel est le stabilisateur de $\mathbf{F}_q^d \times 0 \subset \mathbf{F}_q^n$?]

Exercice 5. — On considère l'action naturelle de $\mathfrak{S}_n$ sur $\{1, \ldots n\}$.

a) Pour tout $i \in \{1, \ldots n\}$, décrire le stablisateur de i. A quel groupe est-il isomorphe ?

b) Montrer que deux tels sous-groupes $\mathrm{Stab}_{\{i\}}$ et $\mathrm{Stab}_{\{j\}}$ sont conjugués dans $\mathfrak{S}_n$.

Exercice 6. — **Centre d'un p–groupe**
Soit G un p-groupe. On note $Z(G)$ le centre de G.

a) Montrer que $Z(G)$ est de cardinal divisible par p. En déduire que $Z(G)$ est non trivial.
[**Indication :** Ecrire l'équation aux classes pour l'action de G sur lui-même par conjugaison.]

b) En déduire la classification à isomorphisme près des groupes d'ordre p^2.
[**Indication:** Utiliser l'exercice 7 de la feuille "groupes quotients".]

Exercice 7. — Soit p un nombre premier, G un p-groupe agissant sur un ensemble fini X. On note $X^G \subset X$ l'ensemble des points fixes. Montrer que l'on a
$$|X| \equiv \left|X^G\right| [p].$$

Exercice 8. — **Les colliers de Pólya** [1] On souhaite dénombrer le nombre de colliers distincts que l'on peut fabriquer avec 6 perles et 3 couleurs.

a) On considère que deux colliers sont identiques si l'on passe de l'un à l'autre par une rotation. En appliquant la formule de Burnside à l'action du groupe $\mathbf{Z}/6$ sur l'ensemble de tous les colliers possibles (sans identification), montrer qu'il y a 130 types de colliers distincts.

b) Montrer qu'il y a 92 colliers possibles si l'on identifie aussi deux colliers symétriques par un symétrie axiale.

Exercice 9. — Soit X un ensemble fini de cardinal $n \geqslant 2$, muni d'une action *transitive* d'un groupe fini G. On pose
$$G_0 := \{g \in G,\ \forall x \in X,\ g \cdot x \neq x\}.$$
En appliquant la formule de Burnside, montrer que $|G_0| \geqslant n-1$ (en particulier, G_0 est non vide).

Exercice 10. — Soit G un groupe fini et H un sous-groupe d'indice p le plus petit facteur premier de $|G|$. On considère l'action de G sur G/H et le morphisme associé $\varphi : G \to \mathfrak{S}(G/H) \cong \mathfrak{S}_p$

a) Soit K le noyau de φ. Montrer que $K \subset H$ puis que $\frac{|G|}{|K|}$ divise $p!$.

b) En déduire que $K = H$ et que H est distingué dans G.

Exercice 11. — En faisant agir $\mathrm{Aut}(\mathbf{Z}/2 \times \mathbf{Z}/2)$ sur un ensemble à 3 éléments bien choisi, établir un isomorphisme de groupes :
$$\mathrm{Aut}(\mathbf{Z}/2 \times \mathbf{Z}/2) \cong \mathfrak{S}_3.$$
N.B. : Remarquer au passage que $\mathrm{Aut}(\mathbf{Z}/2 \times \mathbf{Z}/2) = \mathrm{GL}_2(\mathbf{F}_2)$.

Exercice 12. — **[Polynômes invariants]** On considère l'action de $\mathbf{Z}/2\mathbf{Z} = \{1, \varepsilon\}$ sur $\mathbf{C}[X_1, \ldots, X_n]$ définie par $\varepsilon \cdot X_i = -X_i$. Montrer que $\mathbf{C}[X_1, \ldots, X_n]^G = \mathbf{C}[X_1^2, \ldots, X_iX_j, \ldots, X_n^2]$.

Exercice 13. — **[Action continue sur un espace topologique]**

1. Soit $\varphi : X \to Y$ une bijection continue d'un espace topologique compact X dans un espace topologique Y séparé [2]. Montrer que φ est un homéomorphisme.
2. Soit X un espace topologique *séparé* muni d'une action *continue* d'un groupe *topologique* **compact**. Pour tout x dans X, on munit l'espace $G/\mathrm{Stab_x}$ de la topologie quotient. Montrer que l'application canonique
$$G/\mathrm{Stab_x} \to \mathcal{O}_x$$
est un *homéomorphisme*.
Application : Montrer que l'on a un homéomorphisme :
$$\mathrm{SO}(n)/\mathrm{SO}(n-1) \cong \mathrm{S}^{n-1}.$$

Exercice 14. — Soit $n \geqslant 1$ un entier. On considère l'action de $G := \mathrm{GL}_n(k) \times \mathrm{GL}_n(k)$ sur $X := \mathrm{M}_n(k) \times \mathrm{M}_n(k)$ donnée par $(P, Q) \cdot (A, B) := (PAQ^{-1}, PBQ^{-1})$.

a) Montrer que si (A_1, B_1) et (A_2, B_2) sont dans la même orbite, alors $\mathrm{rg}\, A_1 = \mathrm{rg}\, A_2$ et $\mathrm{rg}\, B_1 = \mathrm{rg}\, B_2$. Réciproque ?

b) Montrer que $Y := \mathrm{GL}_n(k) \times \mathrm{M}_n(k) \subset X$ est un sous-ensemble stable. Montrer que les orbites de l'action de G sur Y sont en bijection avec les classes de conjugaison dans $\mathrm{M}_n(k)$.

1. G. Pólya (1887 — 1985), mathématicien hongrois.
2. C'est-à-dire tel que deux points distincts admettent des voisinages disjoints.