Les calculatrices, téléphones, tablettes, ordinateurs et autres appareils électroniques similaires, ainsi que les documents sont interdits.

La qualité de la rédaction est un facteur important dans l'appréciation des copies. Les candidats sont donc invités à produire des raisonnements clairs, complets et concis.

Les candidats peuvent à chaque instant utiliser un résultat énoncé dans une question ou une partie précédente, en veillant cependant à bien en indiquer la référence.

INTRODUCTION

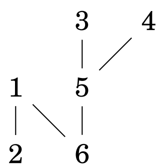
Une matrice carrée à coefficients réels est dite totalement positive (TP en abrégé) si tous ses mineurs sont positifs. Les matrices TP apparaissent naturellement dans diverses questions d'analyse et jouissent de propriétés remarquables ; par exemple, on peut démontrer que les valeurs propres d'une matrice TP sont toutes réelles positives.

Ce problème vise à étudier l'ensemble des matrices TP inversibles de taille $n \times n$ donnée. Deux outils seront mis à contribution. Le premier est la décomposition de Bruhat, qui décrit les doubles classes dans $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ selon le sous-groupe des matrices triangulaires supérieures. Le second est l'étude des écritures des permutations comme produit de transpositions de deux éléments consécutifs.

DÉPENDANCE DES PARTIES ENTRE ELLES

L'épreuve commence par une partie 0 consacrée au rappel de quatre résultats classiques utilisés dans le problème. Il est ici demandé aux candidats de rappeler les preuves de deux de ces résultats, à savoir les théorèmes A et B.

Le problème lui-même fait l'objet des parties 1 à 6. Le graphe suivant indique les dépendances entre ces parties : une arête relie x (en haut) à y (en bas) si la partie y s'appuie sur des résultats ou des notions présentés dans la partie x. On voit par exemple qu'il est possible de commencer par n'importe laquelle des parties 1, 3 ou 4.



NOTATIONS ET CONVENTIONS

Afin de faciliter leur repérage par les candidats, les définitions, les conventions et les notations utilisées seront indiquées par un losange noir dans la marge gauche.

♦ Pour deux ensembles X et Y, la notation $X \setminus Y$ désigne l'ensemble des éléments de X n'appartenant pas à Y.
Le cardinal d'un ensemble fini X est noté $\mathrm{Card}(X)$.
Le minimum de deux entiers m et n sera noté $\min(m, n)$.

Étant donnés deux entiers $m \leq n$, on pose $[\![m,n]\!] = \{m, m+1, \ldots, n\}$.
Etant donné un entier $n \geq 1$, le groupe des permutations de $[\![1,n]\!]$ est noté S_n.
Étant donnés un corps $\mathbb{K}$ et deux entiers strictement positifs m et n, on note $\mathscr{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ l'espace vectoriel des matrices de taille $m \times n$ à coefficients dans $\mathbb{K}$; quand $m = n$, on simplifie la notation en $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.
Le groupe des éléments inversibles de l'anneau $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ est noté $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$.
La dimension d'un espace vectoriel E sera notée $\dim E$.

- Une matrice carrée est dite **unitriangulaire** inférieure (respectivement, supérieure) si elle est triangulaire inférieure (respectivement, supérieure) et si tous ses éléments diagonaux sont égaux à 1.

- Supposons que $\mathbb{K}$ soit le corps $\mathbb{R}$ des nombres réels ou le corps $\mathbb{C}$ des nombres complexes. Étant donné un entier $n \geq 1$, le $\mathbb{K}$-espace vectoriel $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ est de dimension finie ; par suite, toutes les normes dont il peut être muni définissent la même topologie. Sur chacun des sous-ensembles de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ que nous serons amenés à considérer, la topologie utilisée sera la topologie induite.

MINEURS D'UNE MATRICE

Par convention, tous les corps sont supposés être commutatifs.

- Pour deux entiers $n \geq 1$ et $k \geq 0$, on note $\mathscr{P}_k(n)$ l'ensemble des parties à k éléments de $[\![1,n]\!]$.

- Soit $\mathbb{K}$ un corps. Le déterminant d'une matrice carrée $A = (a_{i,j})$ à coefficients dans $\mathbb{K}$ est un élément de $\mathbb{K}$ noté $\det A$. Il est parfois commode d'utiliser la notation alternative

$$\begin{vmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,n} \end{vmatrix}$$

quand on souhaite mentionner explicitement la taille et les coefficients de A ; ici A est de taille $n \times n$, où n est un entier strictement positif.

- Soient à présent m et n deux entiers strictement positifs, et soit $A = (a_{i,j})$ une matrice de taille $m \times n$ à coefficients dans $\mathbb{K}$. Par définition, étant donné $k \in [\![1, \min(m,n)]\!]$, un mineur d'ordre k de A est le déterminant d'une matrice carrée de taille $k \times k$ extraite de A. Chaque couple $(I,J) \in \mathscr{P}_k(m) \times \mathscr{P}_k(n)$ définit ainsi un mineur

$$\begin{vmatrix} a_{i_1,j_1} & \cdots & a_{i_1,j_k} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i_k,j_1} & \cdots & a_{i_k,j_k} \end{vmatrix}$$

d'ordre k de A, où $i_1, \ldots, i_k$ (respectivement, $j_1, \ldots, j_k$) sont les éléments de I (respectivement, J) **rangés par ordre croissant**. Ce mineur sera noté $\Delta_{I,J}(A)$.

0 QUESTIONS DE COURS ET AUTRES RÉSULTATS CLASSIQUES

Les candidats sont invités à rédiger des preuves concises et convaincantes des théorèmes A et B ci-dessous. Les théorèmes C et D seront en revanche admis.

Théorème A. (**à démontrer**) — Soit E un espace vectoriel de dimension finie sur un corps $\mathbb{K}$, et soient F et G deux sous-espaces vectoriels de E. Alors

$$\dim(F+G)+\dim(F\cap G)=\dim F+\dim G.$$

Théorème B. (**à démontrer**) — Le déterminant d'une matrice carrée A, à coefficients dans un corps, admettant une décomposition par blocs de la forme

$$A=\left(\begin{array}{c|c} B & C \\ \hline 0 & F \end{array}\right) \quad \text{ou} \quad A=\left(\begin{array}{c|c} B & 0 \\ \hline D & F \end{array}\right),$$

où B et F sont des matrices carrées, est donné par la formule $\det A=(\det B)(\det F)$.

Théorème C. (**admis**) — Soit $\mathbb{K}$ un corps et n un entier supérieur ou égal à 2. Si x_1, ..., x_n sont des éléments de $\mathbb{K}$, alors

$$\begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \dots & x_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \dots & x_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{1\le i<j\le n}(x_j-x_i).$$

Théorème D. (**admis**) — Soit $\mathbb{K}$ un corps, soit n un entier strictement positif, et soit $A\in\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. Les deux propositions suivantes sont équivalentes :

(i) Pour tout $p\in[\![1,n]\!]$, le mineur $\Delta_{[\![1,p]\!],[\![1,p]\!]}(A)$ est différent de zéro.

(ii) Il existe dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ une unique factorisation $A=LDU$, où D est une matrice diagonale inversible et où L et U sont des matrices unitriangulaires inférieure et supérieure, respectivement.

1 MATRICES TOTALEMENT POSITIVES

1.1 Soit $\mathbb{K}$ un corps, soient m, n, p trois entiers strictement positifs, et soient $A\in\mathscr{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ et $B\in\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. Formons le produit $C=AB$ et écrivons $A=(a_{h,i})$, $B=(b_{i,j})$, $C=(c_{h,j})$, avec $h\in[\![1,m]\!]$, $i\in[\![1,n]\!]$, $j\in[\![1,p]\!]$.

Soit $k\in[\![1,\min(m,p)]\!]$ et soit $(H,J)\in\mathscr{P}_k(m)\times\mathscr{P}_k(p)$. Notons h_1, ..., h_k (respectivement, j_1, ..., j_k) les éléments de H (respectivement, J), rangés par ordre croissant. Notons X_1, ..., X_n et Y_1, ..., Y_k les colonnes des matrices

$$\begin{pmatrix} a_{h_1,1} & \dots & a_{h_1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{h_k,1} & \dots & a_{h_k,n} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} c_{h_1,j_1} & \dots & c_{h_1,j_k} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{h_k,j_1} & \dots & c_{h_k,j_k} \end{pmatrix},$$

respectivement. Ces colonnes appartiennent à l'espace vectoriel $E=\mathbb{K}^k$.

(a) Exprimer Y_1, ..., Y_k en fonction de X_1, ..., X_n et des coefficients $b_{i,j}$ de la matrice B.

(b) Soit $f : E^k \to \mathbb{K}$ une forme k-linéaire alternée. Montrer que

$$f(Y_1,\ldots,Y_k) = \sum_{\substack{\varphi:[\![1,k]\!]\to[\![1,n]\!] \\ \text{injective}}} b_{\varphi(1),j_1}\cdots b_{\varphi(k),j_k} \quad f(X_{\varphi(1)},\ldots,X_{\varphi(k)}),$$

la somme portant sur l'ensemble des applications injectives de $[\![1,k]\!]$ dans $[\![1,n]\!]$.

(c) Sous les hypothèses de la question précédente, montrer que

$$f(Y_1,\ldots,Y_k) = \sum_{I\in\mathscr{P}_k(n)} \sum_{\sigma\in S_k} b_{i_{\sigma(1)},j_1}\cdots b_{i_{\sigma(k)},j_k} \quad f(X_{i_{\sigma(1)}},\ldots,X_{i_{\sigma(k)}}),$$

où i_1, ..., i_k sont les éléments de I rangés par ordre croissant.

(d) Montrer la formule de Binet-Cauchy :

$$\Delta_{H,J}(C) = \sum_{I\in\mathscr{P}_k(n)} \Delta_{H,I}(A)\,\Delta_{I,J}(B).$$

♦ Une matrice carrée à coefficients réels est dite totalement positive (TP en abrégé) si chacun de ses mineurs est positif.

Autrement dit, étant donné un entier $n \geq 1$, une matrice $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ est dite TP si $\Delta_{I,J}(A) \geq 0$ pour chaque $k \in [\![1,n]\!]$ et chaque $(I,J) \in \mathscr{P}_k(n)^2$.

1.2 Dans cette question, les matrices considérées sont carrées à coefficients réels.

(a) Montrer que les coefficients d'une matrice TP sont positifs.

(b) Montrer que la transposée d'une matrice TP est TP.

(c) Montrer que pour tout $n \geq 1$, la matrice identité de taille $n \times n$ est TP.

(d) Montrer que le produit de deux matrices TP de même taille est TP.

(e) L'inverse d'une matrice TP inversible est-elle toujours TP ?

1.3 Soit $n \geq 1$ un entier. Soit $\mathscr{C}_n \subset \mathbb{R}^n$ l'ensemble des n-uplets strictement croissants de réels.

(a) Soit $(b_1,\ldots,b_n) \in \mathscr{C}_n$ et soit $(\lambda_1,\ldots,\lambda_n) \in \mathbb{R}^n$. Montrer que si la fonction à valeurs réelles définie sur $\mathbb{R}$ par

$$x \mapsto \lambda_1 e^{b_1 x} + \cdots + \lambda_n e^{b_n x}$$

s'annule en n points distincts de $\mathbb{R}$, alors $\lambda_1 = \cdots = \lambda_n = 0$.
(Indication : raisonner par récurrence sur n en se ramenant au cas où $b_n = 0$. *Utiliser la dérivation.)*

(b) Étant donnés deux éléments $\underline{a} = (a_1,\ldots,a_n)$ et $\underline{b} = (b_1,\ldots,b_n)$ de $\mathscr{C}_n$, on peut construire la matrice $E = (e_{i,j})$ de taille $n \times n$ et de coefficients donnés par $e_{i,j} = e^{a_i b_j}$. Montrer que cette matrice E est inversible.
(Indication : étudier le système homogène associé.)

(c) Montrer que $\mathscr{C}_n$ est connexe.

(d) Avec les notations de la question (b), montrer que $\det E > 0$, quel que soit $(\underline{a},\underline{b}) \in (\mathscr{C}_n)^2$.

♦ Fixons-nous un entier $n \geq 1$. Désignons le groupe $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ par le symbole $\mathscr{G}$. Notons $\mathscr{G}_+$ l'ensemble des matrices TP appartenant à $\mathscr{G}$, c'est-à-dire l'ensemble des matrices TP inversibles de taille $n \times n$. Notons enfin $\mathscr{G}_+^*$ l'ensemble des matrices de $\mathscr{G}$ dont tous les mineurs sont strictement positifs : une matrice $A \in \mathscr{G}$ appartient à $\mathscr{G}_+^*$ si $\Delta_{I,J}(A) > 0$ pour chaque $k \in [\![1,n]\!]$ et chaque $(I,J) \in \mathscr{P}_k(n)^2$.

1.4

(a) Soient A et B deux éléments de $\mathscr{G}$. Montrer que si $A \in \mathscr{G}_+$ et $B \in \mathscr{G}_+^*$, alors $AB \in \mathscr{G}_+^*$.

(b) Montrer que pour tout $\theta \in]0,1[$, la matrice $T = (t_{i,j})$ de taille $n \times n$ et de coefficients donnés par $t_{i,j} = \theta^{(i-j)^2}$ appartient à $\mathscr{G}_+^*$.
(Indication : développer $(i-j)^2$ et utiliser la question 1.3 (d).)

(c) Construire une suite de matrices appartenant à $\mathscr{G}_+^*$ ayant pour limite la matrice identité dans $\mathscr{G}$.

(d) Montrer que $\mathscr{G}_+$ est l'adhérence de $\mathscr{G}_+^*$ dans $\mathscr{G}$.

2 Factorisation LDU d'une matrice TP inversible

Le but de cette partie est de montrer que pour tous entiers n et p tels que $n > p \geq 1$ et toute matrice totalement positive $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, on a

$$\det A \leq \Delta_{[\![1,p]\!],[\![1,p]\!]}(A)\ \Delta_{[\![p+1,n]\!],[\![p+1,n]\!]}(A). \qquad (*)$$

Nous prouverons cette inégalité par récurrence sur n, en écrivant $(*)$ pour une matrice D de taille plus petite construite à partir de A. Le nœud de l'argument est l'identité de Sylvester, qui permet d'exprimer les mineurs de D en fonction de ceux de A.

2.1 Soit $\mathbb{K}$ un corps, soient q et n deux entiers tels que $n > q \geq 1$, et soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. On considère la matrice $D \in \mathscr{M}_{n-q}(\mathbb{K})$ de coefficients

$$d_{i,j} = \Delta_{[\![1,q]\!]\cup\{q+i\},[\![1,q]\!]\cup\{q+j\}}(A),$$

pour $(i,j) \in [\![1,n-q]\!]^2$.

Dans les questions (a), (b) et (c), on suppose que le mineur $\Delta_{[\![1,q]\!],[\![1,q]\!]}(A)$ est non nul.

(a) Montrer que A se factorise de façon unique comme produit de deux matrices par blocs

$$A = \left(\begin{array}{c|c} \mathbb{I}_q & 0 \\ \hline E & \mathbb{I}_{n-q} \end{array}\right)\left(\begin{array}{c|c} B & F \\ \hline 0 & C \end{array}\right)$$

avec $B \in \mathscr{M}_q(\mathbb{K})$, $C \in \mathscr{M}_{n-q}(\mathbb{K})$, $E \in \mathscr{M}_{n-q,q}(\mathbb{K})$ et $F \in \mathscr{M}_{q,n-q}(\mathbb{K})$, où les symboles $\mathbb{I}_q$ et $\mathbb{I}_{n-q}$ désignent les matrices identités dans $\mathscr{M}_q(\mathbb{K})$ et $\mathscr{M}_{n-q}(\mathbb{K})$, respectivement.

(b) Exprimer la matrice D en fonction de B et C.
(Indication : utiliser la formule de Binet-Cauchy prouvée dans la question 1.1 (d).)

(c) Montrer l'identité de Sylvester : $\det D = \left(\Delta_{[\![1,q]\!],[\![1,q]\!]}(A)\right)^{n-q-1} (\det A)$.

(d) Montrer que l'identité de Sylvester est vraie de façon générale, même si l'hypothèse $\Delta_{[\![1,q]\!],[\![1,q]\!]}(A) \neq 0$ n'est pas satisfaite.
(Note : dans le cas $q = n-1$, on adopte la convention que $0^0 = 1$.)

Dans la suite de cette partie, toutes les matrices considérées sont à coefficients réels.

2.2 Soient n et q deux entiers naturels avec $n > q \geq 1$, soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, et soit $D \in \mathscr{M}_{n-q}(\mathbb{R})$ la matrice construite à partir de A comme dans la question 2.1. Montrer que si A est TP, alors D est aussi TP.

2.3 Dans cette question, nous démontrons $(*)$ par récurrence sur n.

Le cas $n = 2$ ne présente pas de difficulté : nécessairement $p = 1$, et si l'on appelle $a_{i,j}$ les coefficients de A, alors $(*)$ s'écrit

$$a_{1,1}a_{2,2} - a_{1,2}a_{2,1} \leq a_{1,1}a_{2,2}$$

et découle directement de la positivité de $a_{1,2}$ et $a_{2,1}$ (*cf.* question 1.2 (a)).

On prend alors $n \geq 3$ et on suppose le résultat acquis pour les matrices de taille strictement inférieure à n. Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice TP. Comme $(*)$ est banalement vraie si $\det A = 0$, on se place dans le cas où A est inversible.

(a) Montrer que $a_{1,1} > 0$.
(Indication : Raisonner par l'absurde et utiliser la positivité des mineurs $\Delta_{\{1,i\},\{1,j\}}(A)$, pour $(i,j) \in [\![2,n]\!]^2$.)

(b) Montrer que A satisfait l'inégalité $(*)$ pour tout $p \in [\![2,n-1]\!]$.
(Indication : introduire la matrice D de la question 2.1 pour $q = 1$ et prouver la majoration $\Delta_{[\![p,n-1]\!],[\![p,n-1]\!]}(D) \leq (a_{1,1})^{n-p}\ \Delta_{[\![p+1,n]\!],[\![p+1,n]\!]}(A)$.)

(c) Traiter le cas $p = 1$ en le ramenant au cas $p = n-1$ d'une autre matrice.

Soit A une matrice TP inversible. L'inégalité $(*)$ entraîne que $\Delta_{[\![1,p]\!],[\![1,p]\!]}(A) > 0$ pour chaque $p \in [\![1,n]\!]$. D'après le théorème D, il existe une unique factorisation $A = LDU$, où D est une matrice diagonale inversible et où L et U sont des matrices unitriangulaires inférieure et supérieure, respectivement. Les coefficients de ces matrices peuvent s'écrire comme des quotients de mineurs de A ; ils sont donc positifs. En fait, il est même possible de montrer que les matrices L, D et U sont TP. Ce résultat ramène l'étude des matrices TP inversibles à celle des matrices TP unitriangulaires. Nous entreprendrons celle-ci dans la partie 6, après avoir développé les outils nécessaires.

3 Position relative de deux drapeaux

Dans toute cette partie, n est un entier supérieur ou égal à 2.

♦ À chaque permutation $\sigma \in S_n$, on associe deux tableaux de nombres $(p_{i,j}(\sigma))$, pour $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, et $(d_{i,j}(\sigma))$, pour $(i,j) \in [\![0,n]\!]^2$. Ces tableaux sont définis ainsi :

$$p_{i,j}(\sigma) = \begin{cases} 1 & \text{si } i = \sigma(j), \\ 0 & \text{sinon ;} \end{cases}$$

$$d_{i,j}(\sigma) = \begin{cases} \mathrm{Card}\big([\![1,j]\!] \cap \sigma^{-1}([\![1,i]\!])\big) & \text{si } i \geq 1 \text{ et } j \geq 1, \\ 0 & \text{si } i = 0 \text{ ou } j = 0. \end{cases}$$

♦ La matrice $(p_{i,j}(\sigma))$ est notée P_σ et est appelée matrice de permutation de σ.

3.1 Donner le tableau $(d_{i,j}(\sigma))$ associé à la permutation $\sigma \in S_3$ définie par

$$\sigma(1) = 2, \quad \sigma(2) = 3, \quad \sigma(3) = 1.$$

3.2

(a) Montrer que pour chaque permutation $\sigma \in S_n$ et chaque $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, on a

$$d_{i,j}(\sigma) = \sum_{k=1}^{i} \sum_{\ell=1}^{j} p_{k,\ell}(\sigma).$$

(*Concrètement, $d_{i,j}(\sigma)$ compte le nombre de* 1 *dans le coin supérieur gauche de la matrice de permutation de σ, à l'intersection des i premières lignes et des j premières colonnes.*)

(b) Montrer que pour chaque permutation $\sigma \in S_n$ et chaque $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, on a

$$p_{i,j}(\sigma) = d_{i,j}(\sigma) - d_{i,j-1}(\sigma) - d_{i-1,j}(\sigma) + d_{i-1,j-1}(\sigma).$$

(c) Soit un tableau d'entiers $(\delta_{i,j})$, pour $(i,j) \in [\![0,n]\!]^2$. On suppose que :

(i) $\delta_{i,0} = 0$ et $\delta_{i,n} = i$ pour chaque $i \in [\![0,n]\!]$;

(ii) $\delta_{0,j} = 0$ et $\delta_{n,j} = j$ pour chaque $j \in [\![0,n]\!]$;

(iii) $\delta_{i,j} - \delta_{i,j-1} - \delta_{i-1,j} + \delta_{i-1,j-1} \in \{0,1\}$ pour chaque $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$.

Montrer qu'il existe une unique permutation $\sigma \in S_n$ telle que $\delta_{i,j} = d_{i,j}(\sigma)$ pour chaque $(i,j) \in [\![0,n]\!]^2$.

Pour toute la suite de cette partie, on se donne un corps $\mathbb{K}$ et un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E de dimension n.

♦ On appelle drapeau toute suite $\mathbb{F} = (F_0, F_1, \ldots, F_n)$ de sous-espaces vectoriels de E tels que $\dim F_k = k$ pour chaque $k \in [\![0,n]\!]$ et $F_{k-1} \subset F_k$ pour chaque $k \in [\![1,n]\!]$. On note $\mathscr{F}$ l'ensemble des drapeaux.

Étant donnés un drapeau $\mathbb{F} = (F_0, F_1, \ldots, F_n)$ et un automorphisme $g \in \mathrm{GL}(E)$, on peut prendre les images par g des sous-espaces F_k ; on obtient alors un drapeau $g \cdot \mathbb{F} = (g(F_0), g(F_1), \ldots, g(F_n))$. L'application $(g, \mathbb{F}) \mapsto g \cdot \mathbb{F}$ ainsi définie est une action du groupe $\mathrm{GL}(E)$ sur $\mathscr{F}$.

3.3 Montrer que l'action de $\mathrm{GL}(E)$ sur $\mathscr{F}$ est transitive, c'est-à-dire que $\mathscr{F}$ ne contient qu'une seule orbite.

3.4 Soient $\mathbb{F} = (F_0, F_1, \ldots, F_n)$ et $\mathbb{G} = (G_0, G_1, \ldots, G_n)$ deux drapeaux. Pour $(i,j) \in [\![0,n]\!]^2$, on pose $\delta_{i,j} = \dim(F_i \cap G_j)$.

(a) Montrer que pour chaque $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$,

$$\delta_{i,j} - \delta_{i,j-1} - \delta_{i-1,j} + \delta_{i-1,j-1} = \dim\left(\frac{F_i \cap G_j}{(F_i \cap G_{j-1}) + (F_{i-1} \cap G_j)}\right).$$

(Note : le membre de droite est la dimension du quotient de l'espace vectoriel $F_i \cap G_j$ par son sous-espace $(F_i \cap G_{j-1}) + (F_{i-1} \cap G_j)$.)

(b) Montrer qu'il existe une unique permutation $\sigma \in S_n$ telle que $\delta_{i,j} = d_{i,j}(\sigma)$ pour chaque $(i,j) \in [\![0,n]\!]^2$.

♦ Dans le contexte de la question 3.4 (b), on dit que le couple $(\mathbb{F},\mathbb{G})$ est en position σ. Rapprochant 3.2 (b) et 3.4 (a), on observe qu'alors

$$p_{i,j}(\sigma) = \dim\left(\frac{F_i \cap G_j}{(F_i \cap G_{j-1}) + (F_{i-1} \cap G_j)}\right)$$

pour chaque $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$.

♦ Pour chaque permutation $\sigma \in S_n$, on note $\mathscr{O}_\sigma$ l'ensemble des couples de drapeaux $(\mathbb{F},\mathbb{G})$ en position σ.

3.5 Soient $\mathbb{F} = (F_0, F_1, \ldots, F_n)$ et $\mathbb{G} = (G_0, G_1, \ldots, G_n)$ deux drapeaux et soit $\sigma \in S_n$. Montrer que les deux énoncés suivants sont équivalents :

(i) $(\mathbb{F},\mathbb{G}) \in \mathscr{O}_\sigma$.

(ii) Il existe une base $(e_1, \ldots, e_n)$ de E telle que pour chaque $(i,j) \in [\![0,n]\!]^2$, le sous-espace F_i soit engendré par $\{e_1, \ldots, e_i\}$ et le sous-espace G_j soit engendré par $\{e_{\sigma(1)}, \ldots, e_{\sigma(j)}\}$.

♦ On définit une action du groupe $\mathrm{GL}(E)$ sur $\mathscr{F}^2$ en posant $g \cdot (\mathbb{F},\mathbb{G}) = (g \cdot \mathbb{F}, g \cdot \mathbb{G})$, pour $g \in \mathrm{GL}(E)$ et $(\mathbb{F},\mathbb{G}) \in \mathscr{F}^2$.

3.6 Montrer que les $\mathscr{O}_\sigma$, pour $\sigma \in S_n$, sont les orbites de $\mathrm{GL}(E)$ dans $\mathscr{F}^2$.

♦ Pour $k \in [\![1, n-1]\!]$, on note $\tau_k \in S_n$ la transposition qui échange k et $k+1$.

3.7 Soit $(\sigma, k) \in S_n \times [\![1, n-1]\!]$ et soit $(\mathbb{F},\mathbb{G})$ un couple de drapeaux en position σ.
On note $\mathscr{F}'$ l'ensemble des drapeaux $\mathbb{F}'$ ne différant de $\mathbb{F}$ que tout au plus par le sous-espace de dimension k. (Autrement dit, si l'on écrit $\mathbb{F} = (F_0, F_1, \ldots, F_n)$ et $\mathbb{F}' = \left(F'_0, F'_1, \ldots, F'_n\right)$, alors la condition pour que $\mathbb{F}'$ appartienne à $\mathscr{F}'$ est que $F'_i = F_i$ pour chaque $i \in [\![0,n]\!] \setminus \{k\}$.)

(a) Montrer que pour chaque $\mathbb{F}' \in \mathscr{F}'$, le couple $(\mathbb{F}',\mathbb{G})$ est en position σ ou $\tau_k \circ \sigma$.

(b) On suppose que $\sigma^{-1}(k) < \sigma^{-1}(k+1)$. Montrer que pour tout $\mathbb{F}' \in \mathscr{F}' \setminus \{\mathbb{F}\}$, le couple $(\mathbb{F}',\mathbb{G})$ est en position $\tau_k \circ \sigma$.

4 Écritures réduites des permutations

Dans cette partie, n est un entier supérieur ou égal à 2. On rappelle que S_n désigne le groupe des permutations de $[\![1,n]\!]$.

♦ On note Γ l'ensemble des couples (i,j) d'entiers tels que $1 \leq i < j \leq n$. On appelle ensemble des inversions d'une permutation $\sigma \in S_n$ l'ensemble

$$I(\sigma) = \left\{(i,j) \in \Gamma \;\middle|\; \sigma(i) > \sigma(j)\right\} ;$$

le cardinal de $I(\sigma)$ est noté $N(\sigma)$.

4.1 Pour quelle(s) permutation(s) $\sigma \in S_n$ le nombre $N(\sigma)$ est-il maximum ?

♦ Pour $k \in [\![1, n-1]\!]$, on note $\tau_k \in S_n$ la transposition qui échange k et $k+1$.

4.2

(a) Soit $(k, \sigma) \in [\![1, n-1]\!] \times S_n$. Montrer que

$$N(\tau_k \circ \sigma) = \begin{cases} N(\sigma) + 1 & \text{si } \sigma^{-1}(k) < \sigma^{-1}(k+1), \\ N(\sigma) - 1 & \text{si } \sigma^{-1}(k) > \sigma^{-1}(k+1), \end{cases}$$

et que $I(\tau_k \circ \sigma)$ s'obtient à partir de $I(\sigma)$, soit en ajoutant, soit en retirant, un élément de Γ.

(b) Dans le cadre de la question (a), expliciter $\sigma^{-1} \circ \tau_k \circ \sigma$ en fonction de l'élément dont $I(\tau_k \circ \sigma)$ et $I(\sigma)$ diffèrent.

♦ Soit $T = \{\tau_1, \ldots, \tau_{n-1}\}$. On appelle mot une suite finie $m = (t_1, \ldots, t_\ell)$ d'éléments de T. On dit que l'entier ℓ est la longueur de m, et que les éléments t_1, ..., t_ℓ sont les lettres de m. Le cas du mot vide ($\ell = 0$) est autorisé.

Une écriture d'une permutation $\sigma \in S_n$ est un mot $m = (t_1, \ldots, t_\ell)$ tel que $\sigma = t_1 \circ \cdots \circ t_\ell$. On convient que le mot vide est une écriture de l'identité.

4.3

(a) Montrer que le groupe S_n est engendré par T.

(b) Soit $\sigma \in S_n$. Montrer que σ possède une écriture de longueur égale à $N(\sigma)$ et que chaque écriture de σ est de longueur supérieure ou égale à $N(\sigma)$.
(Indication : raisonner par récurrence sur $N(\sigma)$.)

♦ Une écriture d'une permutation $\sigma \in S_n$ est dite réduite si elle est de longueur $N(\sigma)$.

4.4 Trouver une écriture réduite de chacun des six éléments de S_3.

4.5 Soit $\sigma \in S_n$ une permutation et soit $(t_1, \ldots, t_\ell)$ une écriture non réduite de σ. Montrer qu'il existe deux entiers p et q vérifiant $1 \leq p < q \leq \ell$ tels que $(t_1, \ldots, t_{p-1}, t_{p+1}, \ldots, t_{q-1}, t_{q+1}, \ldots, t_\ell)$ soit une écriture de σ.
(Indication : choisir p, q, et $(i,j) \in \Gamma$ de façon à pouvoir écrire

$$I(t_p \circ \cdots \circ t_\ell) = I(t_{p+1} \circ \cdots \circ t_\ell) \setminus \{(i,j)\} \quad \textit{et} \quad I(t_q \circ \cdots \circ t_\ell) = I(t_{q+1} \circ \cdots \circ t_\ell) \cup \{(i,j)\},$$

puis utiliser la question 4.2 (b).)

Le résultat de la question 4.5 peut être interprété ainsi : si un mot m est une écriture non réduite d'une permutation $\sigma \in S_n$, alors on peut obtenir une écriture plus courte de σ en ôtant de m deux lettres convenablement choisies. En répétant cette opération autant de fois que nécessaire, on finit par extraire de m une écriture réduite de σ.

4.6 Soient m et m' deux écritures réduites d'une permutation $\sigma \in S_n$ différente de l'identité. Soit τ_i la première lettre de m et soit τ_j la première lettre de m'.

(a) On suppose que $i \neq j$. Montrer que σ possède une écriture réduite m'' commençant par (τ_j, τ_i).
(Indication : écrire $m = (t_1, \dots, t_\ell)$, constater que le mot $(\tau_j, t_1, \dots, t_\ell)$ n'est pas une écriture réduite de $\tau_j \circ \sigma$, et utiliser le résultat de la question 4.5.)

(b) On suppose que $|i - j| = 1$. Montrer que σ possède une écriture réduite m''' commençant par (τ_i, τ_j, τ_i).
(Indication : itérer la construction utilisée pour répondre à la question (a) et observer que τ_i et τ_j ne commutent pas.)

♦ Étant donnés deux mots m et m' de même longueur ℓ, on écrit $m \approx m'$ si l'on se trouve dans une des deux situations suivantes :

– Il existe un mot $(t_1, \dots, t_{\ell-2})$ et des éléments $p \in [\![0, \ell-2]\!]$ et $(i, j) \in [\![1, n-1]\!]^2$ tels que $|i - j| \geq 2$,

$$m = (t_1, \dots, t_p, \tau_i, \tau_j, t_{p+1}, \dots, t_{\ell-2}) \quad \text{et} \quad m' = (t_1, \dots, t_p, \tau_j, \tau_i, t_{p+1}, \dots, t_{\ell-2}).$$

– Il existe un mot $(t_1, \dots, t_{\ell-3})$ et des éléments $p \in [\![0, \ell-3]\!]$ et $(i, j) \in [\![1, n-1]\!]^2$ tels que $|i - j| = 1$,

$$m = (t_1, \dots, t_p, \tau_i, \tau_j, \tau_i, t_{p+1}, \dots, t_{\ell-3}) \quad \text{et} \quad m' = (t_1, \dots, t_p, \tau_j, \tau_i, \tau_j, t_{p+1}, \dots, t_{\ell-3}).$$

On écrit $m \sim m'$ s'il existe une suite finie $(m_0, \dots, m_k)$ de mots tels que

$$m = m_0 \approx m_1 \approx \cdots \approx m_{k-1} \approx m_k = m'.$$

(Le cas $k = 0$, qui correspond à $m = m'$, est autorisé.)

4.7

(a) Soient $m = (t_1, \dots, t_\ell)$ et $m' = (t'_1, \dots, t'_\ell)$ deux mots de même longueur. Montrer que si $m \sim m'$, alors $t_1 \circ \cdots \circ t_\ell = t'_1 \circ \cdots \circ t'_\ell$.

(b) Soient m et m' deux écritures réduites d'une même permutation. Montrer que $m \sim m'$.

5 Décomposition de Bruhat

Dans cette partie, n est un entier supérieur ou égal à 2 et $\mathbb{K}$ est un corps.

Soit E l'espace vectoriel $\mathbb{K}^n$, muni de sa base standard $(e_1, \dots, e_n)$. On identifie $\mathrm{GL}(E)$ à $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$.

♦ On appelle drapeau standard le drapeau $(F_0, F_1, \dots, F_n)$, où $F_0 = \{0\}$ et où pour $k \geq 1$, le sous-espace vectoriel F_k est engendré par $\{e_1, \dots, e_k\}$.

♦ On note B le sous-groupe de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ formé des matrices inversibles triangulaires supérieures.

♦ À chaque $\sigma \in S_n$ correspond une matrice de permutation P_σ, définie au début de la partie 3. C'est une matrice à coefficients dans $\{0, 1\}$, qu'on peut voir comme appartenant à $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$. On note $C(\sigma)$ l'ensemble des matrices de la forme $b' P_\sigma b''$, avec $(b', b'') \in B^2$; c'est un sous-ensemble de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$.

5.1 Pour cette question, on se place dans le cas particulier $\mathbb{K}=\mathbb{R}$ ou $\mathbb{K}=\mathbb{C}$. On note $\sigma_0 \in S_n$ la permutation définie par $\sigma_0(i)=n+1-i$, pour tout $i \in [\![1,n]\!]$. Montrer que $C(\sigma_0)$ est dense dans $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$.
(Indication : utiliser le théorème D.)

♦ Pour $k \in [\![1,n-1]\!]$ et $a \in \mathbb{K}$, on note $y_k(a)$ la matrice de taille $n \times n$ à coefficients dans $\mathbb{K}$ avec des 1 sur la diagonale, un a en position $(k+1,k)$, et des zéros partout ailleurs :

$$y_k(a)=\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & & & & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & & & & \vdots \\ \vdots & & 0 & 1 & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & & & a & 1 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

5.2 Montrer que $y_k(a) \in C(\tau_k)$ pour tout $(k,a) \in [\![1,n-1]\!] \times \mathbb{K}^*$.
(Indication : observer que $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ a & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & a^{-1} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & -a^{-1} \end{pmatrix}$*.)*

On reprend les notations de la partie 3.

5.3 Soit $\mathbb{F}$ le drapeau standard.

(a) Montrer que pour l'action de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ sur l'ensemble des drapeaux, le sous-groupe B est le stabilisateur de $\mathbb{F}$.

(b) Montrer que pour chaque $\sigma \in S_n$, le couple de drapeaux $(\mathbb{F}, P_\sigma \cdot \mathbb{F})$ est en position σ.

(c) Montrer que pour chaque $\sigma \in S_n$, on a $C(\sigma)=\{g \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K}) \mid (\mathbb{F}, g\cdot\mathbb{F}) \in \mathscr{O}_\sigma\}$.

(d) Montrer que $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ est l'union disjointe des $C(\sigma)$, autrement dit que $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K}) = \bigcup_{\sigma\in S_n} C(\sigma)$ et que les $C(\sigma)$ sont deux à deux disjoints.

♦ Étant données deux parties C et D de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$, on note CD l'ensemble $\{gh \mid (g,h) \in C \times D\}$.

On reprend les notations de la partie 4.

5.4 Soit $(\sigma,k) \in S_n \times [\![1,n-1]\!]$ tel que $N(\tau_k \circ \sigma) > N(\sigma)$.

(a) Montrer que pour tout $g \in C(\sigma)$, le produit $P_{\tau_k} g$ appartient à $C(\tau_k \circ \sigma)$.
(Indication : utiliser la question 3.7 (b).)

(b) En déduire que $C(\tau_k)C(\sigma)=C(\tau_k\circ\sigma)$.

De la question 5.4 (b), on déduit que pour toute permutation $\sigma \in S_n$ et toute écriture réduite $(t_1, t_2, \dots, t_\ell)$ de σ, on a

$$C(\sigma) = C(t_1)C(t_2)\cdots C(t_\ell). \tag{†}$$

La fin de cette partie a pour objectif de déterminer les adhérences des $C(\sigma)$. Pour donner un sens à ce problème, on se place désormais dans le cas particulier $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

♦ Étant données deux permutations ρ et σ, on écrit $\rho \leq \sigma$ si pour chaque $(i,j) \in [\![0,n]\!]^2$, on a $d_{i,j}(\rho) \geq d_{i,j}(\sigma)$. (Noter le changement de sens de l'inégalité.)

5.5

(a) Montrer que $\leq$ est une relation d'ordre sur S_n.

(b) Montrer que la permutation identité est le plus petit élément de S_n pour l'ordre $\leq$.

(c) L'ensemble S_n muni de l'ordre $\leq$ possède-t-il un plus grand élément ?

5.6 Soit $(\rho,\sigma) \in (S_n)^2$ tel que $\rho \leq \sigma$ et soit $k \in [\![1, n-1]\!]$. Démontrer les assertions suivantes :

(a) Si $N(\tau_k \circ \rho) < N(\rho)$, alors $\tau_k \circ \rho \leq \tau_k \circ \sigma$.

(b) Si $N(\tau_k \circ \rho) > N(\rho)$, alors $\rho \leq \tau_k \circ \sigma$.

5.7 Soit $\widehat{E}$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, soient F et G deux sous-espaces vectoriels de $\widehat{E}$, et soit d un entier positif. Montrer que

$$\left\{g \in \mathrm{GL}(\widehat{E}) \,\middle|\, \dim\big(F \cap g(G)\big) \geq d\right\}$$

est une partie fermée de $\mathrm{GL}(\widehat{E})$.

5.8 Soit $(\rho,\sigma) \in (S_n)^2$. Démontrer que les quatre assertions suivantes sont équivalentes.

(i) On a $\rho \leq \sigma$.

(ii) Pour toute écriture réduite $(t_1, \dots, t_\ell)$ de σ, il existe une suite strictement croissante d'indices $1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq \ell$ telle que $(t_{i_1}, \dots, t_{i_k})$ soit une écriture réduite de ρ.

(iii) Il existe une écriture réduite $(t_1, \dots, t_\ell)$ de σ et une suite strictement croissante d'indices $1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq \ell$ telles que $(t_{i_1}, \dots, t_{i_k})$ soit une écriture réduite de ρ.

(iv) L'ensemble $C(\rho)$ est inclus dans l'adhérence de $C(\sigma)$ dans $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$.

(Indication pour l'implication (i) ⇒ (ii) : raisonner par récurrence sur $N(\sigma)$ et utiliser la question 5.6. Indication pour l'implication (iv) ⇒ (i) : utiliser les questions 3.4, 5.3 et 5.7.)

5.9 Démontrer que pour chaque $\sigma \in S_n$, l'adhérence de $C(\sigma)$ dans $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ est donnée par

$$\overline{C(\sigma)} = \bigcup_{\substack{\rho \in S_n \\ \rho \leq \sigma}} C(\rho).$$

(L'union porte sur l'ensemble des permutations $\rho \in S_n$ qui vérifient $\rho \leq \sigma$.)

6 MATRICES UNITRIANGULAIRES TOTALEMENT POSITIVES

Comme indiqué à la fin de la partie 2, on étudie ici l'ensemble des matrices TP unitriangulaires inférieures. Conformément à l'usage, on note $\mathbb{R}_+^*$ l'ensemble des réels strictement positifs.

Dans tout ce qui suit, les matrices considérées sont carrées de taille $n \times n$ et à coefficients réels, où $n \geq 2$ est un entier fixé. (Dans la question 6.1, on se focalise sur le cas particulier $n = 3$.)

Comme dans la partie 5, pour $k \in [\![1, n-1]\!]$ et $a \in \mathbb{R}$, on note $y_k(a)$ la matrice avec des 1 sur la diagonale, un a en position $(k+1, k)$, et des zéros partout ailleurs. On vérifie facilement que la matrice $y_k(a)$ est TP si et seulement si $a \geq 0$ (la démonstration de cette propriété n'est pas demandée). Par suite, tout produit de telles matrices est TP (question 1.2 (d)).

♦ On adopte les notations de la partie 4. Chaque mot $m = (\tau_{k_1}, \dots, \tau_{k_\ell})$ donne lieu à une application $Y(m) : (\mathbb{R}_+^*)^\ell \to \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ définie ainsi :

$$Y(m)(a_1, \dots, a_\ell) = y_{k_1}(a_1) \cdots y_{k_\ell}(a_\ell).$$

Par convention, si m est le mot vide, alors le domaine de définition de $Y(m)$ est un singleton et la valeur de $Y(m)$ en l'unique point où elle est définie est la matrice identité.

6.1 Dans cette question, on examine le cas particulier $n = 3$.

(a) Sur l'exemple du mot $m = (\tau_2, \tau_1)$, montrer que l'image de l'application $Y(m)$ est une sous-variété de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$.

(b) Soient m_1, m_2, ..., m_6 les six mots trouvés dans la question 4.4. Vérifier que les images des applications $Y(m_1)$, $Y(m_2)$, ..., $Y(m_6)$ sont deux à deux disjointes et que leur union est l'ensemble des matrices TP unitriangulaires inférieures.

Les phénomènes observés dans la question 6.1 ont en fait lieu pour tout $n \geq 2$. La démonstration complète étant assez longue, nous nous contenterons de résultats partiels.

6.2 Soit $(i, j) \in [\![1, n-1]\!]^2$ et soit $(a, b, c) \in (\mathbb{R}_+^*)^3$.

(a) On suppose que $|i - j| \geq 2$. Vérifier que $y_i(a) y_j(b) = y_j(b) y_i(a)$.

(b) On suppose que $|i - j| = 1$. Montrer qu'il existe un unique $(a', b', c') \in (\mathbb{R}_+^*)^3$ tel que

$$y_i(a) y_j(b) y_i(c) = y_j(a') y_i(b') y_j(c').$$

L'application $(a, b, c) \mapsto (a', b', c')$ de $(\mathbb{R}_+^*)^3$ dans lui-même ainsi définie est-elle bijective ?

♦ La question 6.2 entraîne que $Y(m)$ et $Y(m')$ ont même image si $m \approx m'$, avec la notation introduite à la fin de la partie 4. La question 4.7 (b) montre alors que si l'on se donne une permutation $\sigma \in S_n$, alors l'image de $Y(m)$ reste constante quand m parcourt l'ensemble des écritures réduites de σ. On note cette image $W(\sigma)$. La question 5.2 et l'égalité (†) (située à la suite de la question 5.4) montrent que $W(\sigma) \subset C(\sigma)$. Au vu de la question 5.3 (d), ceci entraîne que les ensembles $W(\sigma)$ sont deux à deux disjoints.

6.3

(a) Soit $\sigma \in S_n$, soit $k \in [\![1, n-1]\!]$, soit $a \in \mathbb{R}_+^*$, et soit $g \in W(\sigma)$. Montrer que $y_k(a)g$ appartient à $W(\tau_k \circ \sigma)$ si $N(\tau_k \circ \sigma) > N(\sigma)$ et à $W(\sigma)$ dans le cas contraire.

(b) Soit $\sigma \in S_n$, soit $\ell = N(\sigma)$, et soit m une écriture réduite de σ. Montrer que l'application $Y(m) : (\mathbb{R}_+^*)^\ell \to W(\sigma)$ est bijective.

6.4

(a) Démontrer que pour chaque $\sigma \in S_n$, l'adhérence de $W(\sigma)$ dans $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ est

$$\overline{W(\sigma)} = \bigcup_{\substack{\rho \in S_n \\ \rho \leq \sigma}} W(\rho).$$

(b) Montrer que $\bigcup_{\sigma \in S_n} W(\sigma)$ est stable par multiplication et est fermé dans $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$.

On peut montrer que $\bigcup_{\sigma \in S_n} W(\sigma)$ est l'ensemble des matrices TP unitriangulaires inférieures, et que si m est une écriture réduite d'une permutation, alors l'application $Y(m) : (\mathbb{R}_+^*)^\ell \to \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ est un plongement ; ceci implique que les $W(\sigma)$ sont des sous-variétés de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.