Un théorème de Jordan

*Les questions **4** et **5** sont indépendantes des autres questions.*

Soit G un groupe fini opérant sur un ensemble fini X. Ce problème étudie quelques propriétés de l'ensemble G_0 des éléments de G qui agissent sans point fixe :

$$G_0 := \{g \in G,\ \forall\, x \in X,\ g \cdot x \neq x\}.$$

1. **Formule de Burnside.** On note Π_X la représentation de permutation associée à l'action de G sur X : par définition, l'espace vectoriel Π_X a une base $(e_x)_{x\in X}$ indexée par les éléments de X et un élément $g \in G$ agit sur cette base comme suit :

$$\forall\, x \in X,\ g \cdot e_x = e_{g\cdot x}.$$

Pour tout vecteur $v \in \Pi_X$, et pour tout $x \in X$, on note v_x la composante de v selon e_x. On note ψ_X le caractère de la représentation Π_X.

1.1 Soit $\mathcal{O}$ une orbite de l'action de G sur X. Montrer que $\Pi_{\mathcal{O}}$ est une sous-représentation de Π_X. Montrer que $\Pi_{\mathcal{O}}$ contient une et une seule fois la représentation triviale $\mathbf{1}$.
[**Indication :** Si $\mathbf{C}\,w$ est une sous-représentation triviale de $\Pi_{\mathcal{O}}$, montrer que pour tous éléments $x \neq y$ de $\mathcal{O}$, on a $w_x = w_y$.]

1.2 Pour tout élément g de G, on note $\mathrm{Fix}(g) := \{x \in X,\ g \cdot x = x\}$.
Montrer que pour tout $g \in G$ on a $\psi_X(g) = |\mathrm{Fix}(g)|$.
En déduire que le nombre ω_X d'orbites de l'action de G sur X est donné par la formule :

$$\omega_X = \frac{1}{|G|} \sum_{g\in G} |\mathrm{Fix}(g)|. \qquad (\mathbf{B})$$

Dans la suite du problème, on suppose que l'action de G sur X est* transitive*. On pose $n := |X|$; on suppose $n \geqslant 2$.

2.1 Que valent ω_X et $\psi_X(e)$? (e désignant l'élément neutre de G)
En utilisant la formule ($\mathbf{B}$), en déduire que G_0 est non vide et que l'on a $|G_0| \geqslant n - 1$.

2.2 Montrer l'inégalité $\langle \psi_X, \psi_X \rangle \geqslant 2$.

2.3 On considère l'action de G sur $X \times X$ donnée par $g \cdot (x, y) = (g \cdot x, g \cdot y)$.
En utilisant **1.2**, montrer que le caractère $\psi_{X\times X}$ de $\Pi_{X\times X}$ est donné par

$$\forall\, g \in G,\ \psi_{X\times X}(g) = \psi_X(g)^2.$$

En déduire que l'on a $\langle \psi_X, \psi_X \rangle = 2$ si et seulement si l'action de G sur X est 2-transitive.
(On rappelle que 2-transitif signifie que pour tous couples d'éléments distincts $x_1 \neq y_1, x_2 \neq y_2$ de X, il existe $g \in G$ tel que $g \cdot x_1 = x_2$ et $g \cdot y_1 = y_2$. On pourra montrer que cette condition équivaut à ce que l'action de G sur $X \times X$ ait deux orbites : la diagonale et son complémentaire.)

3. Dans cette question, on améliore l'estimation sur $|G_0|$ obtenue en **2.1**.

3.1 Montrer l'inégalité $\sum_{g\in G\setminus G_0} (\psi_X(g)-1)(\psi_X(g)-n) \leqslant 0$.

3.2 En utilisant **2.2**, montrer que $\sum_{g\in G} (\psi_X(g)-1)(\psi_X(g)-n) \geqslant |G|$.

3.3 En déduire l'inégalité $|G_0| \geqslant \frac{|G|}{n}$.

3.4 En utilisant **2.3**, Montrer que l'on a $|G_0| = \frac{|G|}{n}$ si et seulement si les deux conditions suivantes sont satisfaites :
($\star$) L'action de G sur X est 2-transitive
($\star\star$) $\forall\, g \in G - \{e\},\ |\mathrm{Fix}(g)| \leqslant 1$

4. Exemples. Soit $q = p^\alpha$ une puissance d'un nombre premier. On note $\mathbf{F}_q$ un corps fini à q éléments.

4.1 Calculer $\frac{|G_0|}{|G|}$ dans le cas particulier où $X = \mathbf{F}_q$ et où G est le groupe des transformations affines $z \mapsto az+b$, $a \in \mathbf{F}_q^*, b \in \mathbf{F}_q$.
En déduire que l'inégalité $|G_0| \geqslant \frac{|G|}{n}$ obtenue en **3.3** est optimale.

4.2 Dans le cas où $X = \mathbf{P}^1(\mathbf{F}_q)$ et $G = \mathrm{PGL}(2, \mathbf{F}_q)$, montrer que

$$\lim_{q\to\infty} \frac{|G_0|}{|G|} = \frac{1}{2}.$$

5. Groupes de Frobenius. On suppose que le groupe G satisfait aux conditions ($\star$) et ($\star\star$) de **3.4**. D'après **3.4**, on a donc $|G_0| = \frac{|G|}{n}$.

5.1 Pour tout $x \in X$, on note $\mathrm{Stab}_x := \{g \in G,\ g\cdot x = x\}$. Montrer que pour $x \neq y$, $\mathrm{Stab}_x \cap \mathrm{Stab}_y = \{e\}$. En déduire que $|G| = n\cdot(n-1)$.

5.2 Montrer que pour tout couple d'éléments distincts $x \neq y$ de X, il existe un unique élément $g_{x,y} \in G_0$ tel que $g_{x,y}\cdot x = y$.
[**Indication :** Pour montrer l'unicité, raisonner par l'absurde : si $g_{x,y}$ et $g'_{x,y}$ conviennent, construire, en les conjuguant par des éléments convenables, une famille de $2(n-1)$ éléments distincts de G_0.]

5.3 Déduire de **5.2** que l'ensemble $N := G_0 \cup \{e\}$ est un sous-groupe de G.
Montrer que N est distingué dans G.

5.4 Soit $x \in X$. Montrer que l'application de passage au quotient $\mathrm{Stab}_x \hookrightarrow G \xrightarrow{q} G/N$ est un isomorphisme de groupes. En déduire que G est isomorphe à un produit semi-direct

$$G \cong N \rtimes \mathrm{Stab}_x.$$

5.5 Montrer que l'action par conjugaison de Stab_x sur $N - \{e\}$ est sans point fixe, puis que cette action est transitive.

5.6 Montrer que tous les éléments de N ont le même ordre.

5.7 Déduire de ce qui précède que n est une puissance d'un nombre premier p.