Produits semi-directs

Exercice 1. — Soit G un groupe et N un sous-groupe distingué (“normal”). On note π le morphisme canonique $G \to G/N$.

a) Montrer que le choix pour tout élément $[g] \in G/N$ d'un représentant $\tilde{g} \in G$ permet d'expliciter une bijection $G \cong N \times G/N$.
Montrer que la donnée précédente est équivalente à la donnée d'une section $G/N \to G$ (c'est-à-dire une application s telle que $\pi \circ s = \mathrm{id}$).

b) Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes :

(i) Il existe une section s de π qui est un morphisme de groupes.

(ii) G admet un sous-groupe H tel que $N \cap H = \{e\}$ et $G = NH$.

(iii) G admet un sous-groupe H tel que $\pi_{|H}$ soit un isomorphisme.

Dans ces conditions, montrer que l'application qui à $h \in G/N$ associe l'automorphisme de N donné par la conjugaison par $s([h])$ est un morphisme de groupes.
Expliciter la structure de groupe induite sur $N \times G/N$ par la bijection du **a)** en fonction de la structure de groupes de N, de G/N et du morphisme $G/N \to \mathrm{Aut}(N)$.

c) Réciproquement, étant donnés deux groupes N et H et un morphisme de groupes $\psi : H \to \mathrm{Aut}(N)$, on munit l'ensemble $N \times H$ de la structure de groupes :

$$(n_1, h_1) \cdot (n_2, h_2) := (n_1\,[\psi(h_1)(n2)], h_1 h_2).$$

On note ce groupe $N \rtimes_\psi H$.
Montrer que $\tilde{N} := (n, e)$ est un sous-groupe distingué de $N \rtimes_\psi H$, que le quotient $(N \rtimes_\psi H)/\tilde{N}$ s'identifie à H, que $s(h) := (1, h)$ est une section qui est un morphisme de groupes et que $\varphi(h) \in \mathrm{Aut}(N)$ s'identifie à la conjugaison par (e, h).

Exercice 2. — **Produits directs**
Soient G un groupe, N un sous-groupe distingué et $\pi : G \to G/N$ le morphisme canonique. Montrer que G est isomorphe à $G \times G/N$ dans les cas suivants :

a) G est abélien et il existe un morphisme section de π.

b) Plus généralement, il existe un sous-groupe $H \subset Z(G)$ tel que $\pi_{|H}$ soit un isomorphisme.

c) Il existe une rétraction de G dans N (c'est-à-dire un morphisme $G \to N$ tel que la composée $N \subset G \to N$ soit l'identité de N).

Exercice 3. — Peut-on décomposer comme produits semi-directs les groupes suivants en prenant le sous-groupe distingué N donné :

a) Le groupe affine Aff_n (N= les translations.)

b) Le groupe diédral D_{2n} (N= les rotations.)

c) Le groupe linéaire $\mathrm{GL}_n(k)$ ($N = \mathrm{SL}_n(k)$.)

d) Les quaternions H_8 ($N = \{\pm 1\}$ ou $N = \{\pm 1, \pm i\}$.)

e) Le groupe orthogonal $\mathrm{O}_n(\mathbf{R})$. ($N = \mathrm{SO}_n(\mathbf{R})$)

f) Le groupe symétrique $\mathfrak{S}_n$ ($N = \mathfrak{A}_n$.)

Montrer que si n est impair, $\mathrm{GL}_n(\mathbf{R})$ et $\mathrm{O}_n(\mathbf{R})$ sont des produits directs.

Exercice 4. — Soient G un groupe et φ un automorphisme de G. Montrer qu'il existe un groupe K contenant G comme sous-groupe distingué et un élément $k \in K$ tel que φ s'identifie à la conjugaison par k.

Exercice 5. — Soient p premier, $G = \mathbf{Z}/p^2$ et $N = \mathbf{Z}/p$. Montrer que le morphisme $G \to G/N$ n'admet pas de section qui soit un morphisme de groupes.

Exercice 6. — **Isomorphismes entre produits semi-directs**
Soient N et H deux groupes et $\varphi, \psi : H \to \mathrm{Aut}(N)$ deux morphismes. Montrer que chacune des conditions suivantes entraîne que les groupes $N \rtimes_\varphi H$ et $N \rtimes_\psi H$ sont isomorphes.

a) Il existe $\alpha \in \mathrm{Aut}(H)$ tel que $\psi = \varphi \circ \alpha$.

b) Il existe $u \in \mathrm{Aut}(N)$ tel que

$$\forall h \in H, \psi(h) = u\varphi(h)u^{-1}.$$