# Groupes quotients

***Exercice 1.*** — Soit $G$ un groupe et $H \subset G$ un sous-groupe.

**a)** Montrer que si $H$ est d'indice 2 dans $G$, alors il est distingué dans $G$. Qu'est alors $G/H$ ?

**b)** Montrer que $H$ est distingué dans $G$ ssi les classes à gauche et à droite coïncident.

**c)** On pose $n = |H|$. Montrer que si $H$ est le seul sous-groupe de $G$ de cardinal $n$, alors il est distingué dans $G$.

**d)** Soit $G$ un groupe dont tous les sous-groupes sont distingués. $G$ est-il abélien ?

**e)** Quels sont les sous-groupes distingués et les quotients de $\mathbf{Z}$ et $\mathbf{Z}/n$ ?

**f)** Pour quelles valeurs de $n$ le groupe symétrique $\mathfrak{S}_n$ est-il un quotient de $\mathbf{Z}^k$ pour $k \in \mathbf{N}$ ?

**g)** Montrer que si $H$ est d'indice fini, alors pour tout sous-groupe $K$ de $G$, $H \cap K$ est d'indice fini dans $K$ et que l'on a $[K : H \cap K] \leqslant [G : H]$.

**h)** Montrer que la préimage d'un sous-groupe distingué par un morphisme est distingué. Montrer que l'image d'un sous-groupe distingué par un morphisme *sujectif* est distinguée.

**i)** Donner un exemple de sous-groupes $K$ et $H$ avec $K \lhd H$ et $H \lhd G$ mais $K \ntriangleleft G$.

**j)** Montrer que si $H$ est distingué et cyclique, alors tout $K \subset H$ est distingué dans $G$.

**k)** Montrer que si $H$ est d'indice fini $[G : H] = m$, pour tout $g \in G$, il existe un entier $1 \leqslant k \leqslant m$ tel que $g^k \in H$.

***Exercice 2.*** — Soit $H \lhd G$ des groupes.

**a)** Montrer que l'application canonique $\pi : G \to G/H$ est surjective et déterminer son noyau. Réciproquement, soit $Q$ un groupe et $\varphi : G \to Q$ un morphisme de groupes surjectif. Montrer que $Q$ est isomorphe à un quotient de $G$.

**b)** **Propriété universelle du quotient.** Soit $K$ un autre groupe. Montrer que l'ensemble des morphismes de groupes de $G/H$ dans $K$ est en bijection avec l'ensemble des des morphismes de groupes de $G$ dans $K$ dont la restriction à $H$ est triviale.

***Exercice 3.*** — Soient $H_1 \subset G_1$ et $H_2 \subset G_2$ des groupes.

**a)** On suppose $H_1$ et $H_2$ distingués. Montrer que $H_1 \times H_2$ est distingué dans $G_1 \times G_2$ et que l'on a un isomorphisme de groupes $(G_1 \times G_2)/(H_1 \times H_2) \cong G_1/H_1 \times G_2/H_2$.

**b)** On suppose que $H_1$ est distingué et qu'il existe un *isomorphisme* $\varphi : G_1 \to G_2$ tel que $H_2 = \varphi(H_1)$. Montrer qu'on a alors des isomorphismes $H_1 \cong H_2$ et $G_1/H_1 \cong G_2/H_2$.

**c)** On suppose que $G_1$ et $G_2$ sont isomorphes et que $H_1$ et $H_2$ sont isomorphes et distingués. Les groupes $G_1/H_1$ et $G_2/H_2$ sont-ils nécessairement isomorphes ?

***Exercice 4.*** — **Lemmes d'isomorphisme**
Soient $G$ un groupe, $H$ un sous-groupe distingué et $\pi : G \to G/H$ le morphisme canonique.

**a)** Soit $\varphi : G \to K$ un morphisme. Montrer l'isomorphisme $\operatorname{Im}\varphi \cong G/\operatorname{Ker}\varphi$.

**b)** Soit $K$ un sous-groupe de $G$. Montrer que $K \cap H$ est distingué dans $K$ et que $\pi(K)$ est isomorphe à $K/(K \cap H)$.

**c)** Montrer que $KH := \{k \cdot h,\ k \in K,\ h \in H\}$ est un sous-groupe de $G$ contenant $H$ comme sous-groupe distingué et que l'on a un isomorphisme $KH/H \cong K/(H \cap K)$.

**d)** Etablir une bijection entre l'ensemble des sous-groupes (distingués) de $G/H$ et l'ensemble des sous-groupes (distingués) de $G$ contenant $H$.

**e)** Si $K$ est un sous-groupe distingué de $G$ contenant $H$, montrer l'isomorphisme $(G/H)/(K/H) \cong G/K$.

***Exercice 5***. — Soit $E$ un $k$-espace vectoriel et $F \subset E$ un sous-espace vectoriel. Montrer que pour tout supplémentaire $G$ de $F$ dans $E$ on a un isomorphisme (d'espaces vectoriels) $G \cong E/F$.

***Exercice 6***. — Soit $G$ un groupe, $Z(G)$ son centre. On suppose que $G/Z(G)$ est cyclique. Montrer que $G$ est abélien.
Donner un exemple de groupes $H \lhd G$ avec $H$ et $G/H$ commutatifs mais pas $G$.

***Exercice 7***. — Pour les exemples suivants, vérifier que $H$ est distingué dans $G$ et déterminer les quotients :

**a)** $G = \mathrm{GL}_n(k)$, $H = \mathrm{SL}_n(k)$ (pour $k$ un corps)

**b)** $G = \mathrm{O}_n(\mathbf{R})$, $H = \mathrm{SO}_n(\mathbf{R})$

**c)** $G = \mathbf{Z}/2 \times \mathbf{Z}/4$, $H = \langle(0,2)\rangle$ (resp. $H = \langle(1,2)\rangle$, resp. $H = \langle(1,1)\rangle$)

**d)** $G = \mathrm{H}_8$ (les quaternions) et $H = \langle -1 \rangle$ (resp. $H = \langle i \rangle$)

***Exercice 8***. — **Normalisateur**
Soient $G$ un groupe et $H$ un sous-groupe. On appelle normalisateur de $H$ dans $G$ et l'on note $N_H$ le sous-ensemble de $G$ formé des éléments $x \in G$ tels que $xHx^{-1} = H$.

**a)** Montrer que $N_H$ est un sous-groupe de $G$ et que $H$ est distingué dans $N_H$.

**b)** Montrer que $N_H$ est le plus grand sous-groupe de $G$ dans lequel $H$ est distingué.

***Exercice 9***. — **Abélianisé**
Soit $G$ un groupe fini. On note $D(G)$ le sous-groupe de $G$ engendré par les commutateurs (c'est-à-dire les éléments de la forme $ghg^{-1}h^{-1}$, $g, h \in G$).

**a)** Monter que $D(G)$ est un sous-groupe distingué de $G$.

**b)** Montrer que le quotient $G/D(G)$ est abélien et que c'est même le plus gros quotient abélien de $G$ au sens où il vérifie la propriété universelle suivante : tout morphisme $\varphi : G \to A$ dans un groupe abélien $A$ se factorise par la projection canonique $G \to G/D(G)$.
$G/D(G)$ s'appelle l'abélianisé de $G$ et se note parfois $G_{\mathrm{ab}}$.

**c)** Calculer l'abélianisé du groupe symétrique $\mathfrak{S}_n$ et du groupe diédral $D_{2n}$.

***Exercice 10***. — **Groupe diédral**
On note $D_{2n}$ le $n$-ème groupe diédral. Soit $H$ un sous-groupe strict distingué de $D_{2n}$.

**a)** Montrer que si $n$ est impair alors $H$ est un sous-groupe du groupe des rotations. Déterminer les $H$ possibles.

**b)** Si $n$ est pair, montrer que $D_{2n}$ admet deux sous-groupes distingués isomorphes à $D_{2\frac{n}{2}}$ et que ce sont les seuls $H$ possibles qui contiennent une symétrie.

**c)** Déterminer les quotients de $D_{2n}$.

***Exercice 11***. — Soit $G$ un groupe topologique (c'est-à-dire un espace topologique $G$, muni d'une structure de groupe $G \times G \to G$ et d'un inverse $G \to G$ continues). Soit $H$ un sous-groupe de $G$ qui est *ouvert*. Montrer que $H$ est aussi fermé dans $G$.
[**Indication:** Considérer les classes à gauche $G/H$.]