Théorèmes de Sylow

Exercice 1. — Expliciter les sous-groupes de Sylow des groupes suivants :

a) un groupe abélien fini,

b) les groupes symétriques $\mathfrak{S}_3, \mathfrak{S}_4$ et $\mathfrak{S}_5$,

c) les groupes alternés $\mathfrak{A}_4$ et $\mathfrak{A}_5$,

d) les groupes diédraux D_5 et D_6.

Exercice 2. — **[Démonstration de Wielandt**, *c.f.* Perrin C.2]
Soit p un nombre premier, G un groupe. On écrit $|G| = p^\alpha m$ avec $(m,p) = 1$.
Soit X l'ensemble des *parties* de G de cardinal p^α et $\mathcal{S} \subset X$ l'ensemble des p-Sylow de G.

a) Justifier que l'action de G sur lui-même par translation induit une action de G sur X.

b) Pour $E \in X$, montrer que $|\operatorname{Stab}_E| \leqslant p^\alpha$.

c) Montrer que l'on a égalité $|\operatorname{Stab}_E| = p^\alpha$ ssi E est de la forme Sg pour un certain $S \in \mathcal{S}$ et un $g \in G$ et qu'alors $S = \operatorname{Stab}_E$.

d) En écrivvant l'équation aux classes de G sur X montrer

$$|X| \equiv |\mathcal{S}| \cdot m \ [p].$$

e) Par un calcul direct, montrer que $|X| \equiv m \ [p]$.

f) En déduire que $|\mathcal{S}| \equiv 1 \ [p]$, ce qui prouve le premier théorème de Sylow et une partie du second.

Exercice 3. — Soit G un groupe fini et p un diviseur premier de $|G|$. On écrit $|G| = p^n m$.

a) Montrer que les théorèmes de Sylow permettent de retrouver le "lemme de Cauchy" : il existe un élément d'ordre p dans G.

b) Plus généralement, montrer par récurrence sur n, que G admet un sous-groupe d'ordre p^k pour tout $0 \leqslant k \leqslant m$.

c) En général, si d divise $|G|$, existe-t-il un sous-groupe de G de cardinal d ?

Exercice 4. — **[Utilisation sophistiquée de Sylow**, *c.f.* Perrin E]

a) Montrer qu'un groupe d'ordre 12 n'est pas simple.
[**Indication :** S'il y a plusieurs 3–Sylow, quelle place reste-t-il pour le 2–Sylow ?]

b) Montrer qu'un groupe d'ordre 36 n'est pas simple.
[**Indication :** Faire agir le groupe sur ses 3–Sylow.]

c) Montrer qu'un groupe d'ordre p^2q n'est pas simple.
[**Indication :** Distinguer suivant les valeurs du nombre n_q de q–Sylow.]

Exercice 5. — Soit G un groupe fini, p un nombre premier et S un p–Sylow de G. On note $N := \{g \in G, gSg^{-1} = S\}$ le normalisateur de S dans G. Montrer que le nombre n_p de *p–Sylow* de G est égal à l'indice $[G : N]$.

Exercice 6. — Soit G un groupe de cardinal 24. On suppose qu'aucun des Sylow (pour $p = 2, 3$) n'est distingué. En faisant agir G sur ses 3–Sylow, montrer que G est isomorphe à $\mathfrak{S}_4$.

Exercice 7. — Soient p un nombre premier et $G = \mathrm{GL}_2(\mathbf{Z}/p)$.

a) Soit $A \in \mathrm{GL}_2(\mathbf{Z}/p)$ une matrice d'ordre p (*i.e.* $A^p = \mathrm{id}$). En utilisant les théorèmes de Sylow, montrer que A est conjuguée à une matrice triangulaire supérieure de la forme $\begin{bmatrix} 1 & * \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

b) Retrouver ce résultat directement par de l'algèbre linéaire.

c) En utilisant l'exercice 5, montrer que le nombre de p-Sylow de G est $p+1$.

d) En déduire qu'il y a exactement $p^2 - 1$ éléments d'ordre p dans G.

Exercice 8. — Soit G un groupe fini, $p \neq q$ des diviseurs premiers de $|G|$. On suppose que G n'a qu'un seul p-Sylow P et qu'un seul q-Sylow Q.
Montrer que tout élément de P commute avec tout élément de Q.
[**Indication:** Remarquer que P et Q sont distingués dans G et que $P \cap Q$ est le groupe trivial. Si $x \in P$ et $y \in Q$, $(xyx^{-1})y^{-1} = x(yx^{-1}y^{-1})$.]

Exercice 9. — **[Classification des groupes d'ordre pq, $p < q$, $q \not\equiv 1[p]$]**
Soient $p \neq q$ des nombres premiers, G un groupe d'ordre p^2q avec $p < q$ et $q \not\equiv 1[p]$ (par exemple d'ordre 15, 35, 51). Le but de cet exercice est de montrer qu'alors G est abélien.
Soit n_p (resp. n_q) le nombre de p-Sylow (resp. q-Sylow). Montrer que $n_p = 1$ et $n_q = 1$.
Conclure en remarquant que les sous-groupes de Sylow P et Q de G sont abéliens, que $G = PQ$ et en utilisant l'exercice 8.

Exercice 10. — **[Classification des groupes d'ordre p^2q, $p < q$, $q \not\equiv 1[p]$]**
Soient $p \neq q$ des nombres premiers, G un groupe d'ordre p^2q avec $p < q$ et $q \not\equiv 1[p]$ (par exemple d'ordre 45, 99, 175). Le but de cet exercice est de montrer qu'alors G est abélien.

a) Soit n_p (resp. n_q) le nombre de p-Sylow (resp. q-Sylow). Montrer que $n_p = 1$ et $n_q = 1$.

b) Conclure en remarquant que P et Q sont abéliens, que $G = PQ$ et en utilisant l'exercice 8.

Exercice 11. — Soit G un groupe et S un 2–Sylow. On suppose S cyclique et $|G| > 2$. Montrer que G n'est pas simple.
[**Indication :** Construire un morphisme de groupe $G \to \mathfrak{S}(G)$ en faisant agir G sur lui-même par translation. Montrer que ce morphisme n'est pas trivial en calculant la signature de la permutation induite par un générateur de S.]