Dualité

Exercice 1. — Pour $n \geqslant 1$ entier, $k[X]_{\leqslant n}$ est l'espace vectoriel des polynômes de degré $\leqslant n$.

a) On suppose $\operatorname{car} k = 0$. Pour $a \in k$ fixé, déterminer la base duale de la base $\{1, (X-a), (X-a)^2, \ldots, (X-a)^n\}$.
Quelle formule retrouve-t-on ainsi ?

b) Soient $a_0, \ldots, a_n$ des éléments distincts de k. Montrer que les formes linéaires $ev_i : P \mapsto P(a_i)$ forment une base de $(k[X]_{\leqslant n})^*$.
Décrire la base duale $\{ev_i^*\}$ et retrouver l'interpolation de Lagrange.
En déduire que le coefficient dominant d'un polynôme P vaut

$$c_n(P) = \sum_{k=0}^{n} \frac{P(a_k)}{\prod_{j \neq k} a_k - a_j}.$$

Exercice 2. — Étant donné des vecteurs formant une base $(e_1, \ldots, e_n)$ de $\mathbf{R}^n$, décrire un algorithme (simple) pour expliciter les coefficients de la base duale $(e_1^*, \ldots, e_n^*)$.
[**Indication:** Cela revient à inverser une matrice.]

Exercice 3. — **Dual de $k[X]$**
On note $e_0 = 1, e_1 = X, \ldots$ la base canonique de $E := k[X]$ et $e_0^*, e_1^*, \ldots$ les fonctions coordonnées associées.

a) La famille e_i^* est-elle libre ? génératrice ?

b) Soit $F = \operatorname{Vect}(e_i^*)$. Déterminer $G := \{P, \forall \varphi \in F, \varphi(P) = 0\}$, puis $G^\perp$.

Exercice 4. — Soient E et F deux ev de dimension finie. On fixe une base $\mathcal{B}$ de E et $\mathcal{F}$ de F, et l'on note $\mathcal{B}^*$ et $\mathcal{F}^*$ les bases duales de E^* et F^*. Soit $u \in \mathcal{L}(E, F)$.

a) Montrer que l'on a $\operatorname{mat}_{(\mathcal{F}^*, \mathcal{B}^*)} {}^t u = {}^t(\operatorname{mat}_{(\mathcal{B}, \mathcal{F})} u)$.

b) Montrer que l'on a $\ker {}^t u = (\operatorname{Im} u)^\perp$ et $\operatorname{Im} {}^t u = (\ker u)^\perp$. Retrouver l'identité $\operatorname{rg}({}^t u) = \operatorname{rg}(u)$.

c) Montrer que u est injective (resp. surjective) ssi ${}^t u$ est surjective (resp. injective).

Exercice 5. — Soit $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace vectoriel muni d'un produit scalaire (ou plus généralement d'une forme bilinéaire non dégénérée). Montrer que le morphisme $x \mapsto (y \mapsto \langle y, x \rangle)$ est un isomorphisme de E sur E^*.
Application :

a) Rappeler la définition du gradient d'une fonction C^1 de $\mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$.

b) Toute forme linéaire de $M_n(k)$ est de la forme $M \mapsto \operatorname{tr}(AM)$ pour un certain $A \in M_n(k)$.

c) Toute forme linéaire sur $\mathbf{R}[X]_{\leqslant n}$ est de la forme $P \mapsto \int_0^1 P(t)Q(t)dt$ pour un certain $Q \in \mathbf{R}[X]_{\leqslant n}$.

Exercice 6. — Soit $\mathbf{F}_q$ un corps fini. Montrer que, dans $\mathbf{F}_q^n$, il y a autant de sev de dimension d que de sev de dimension $n-d$ (pour $0 \leqslant d \leqslant n$).

Exercice 7. — **Hyperplans**
Soit E un ev de dimension finie n. Montrer que les sev de E de dimension $n-1$ sont exactement les noyaux des formes linéaires non nulles.
Si φ et ψ sont deux formes linéaires, à quelle condition a-t-on $\ker \varphi = \ker \psi$?

Exercice 8. — **Intersections d'hyperplans**
Soient E un ev de dimension finie n et F un sev de dimension d.

a) Montrer qu'il existe $n-d$ hyperplans $H_{d+1},\ldots,H_n$ dont l'intersection soit F.
[**Indication:** $F=(F^{\perp})^{\perp}$.]

b) Soient $\varphi_1,\ldots,\varphi_k\in E^*$, montrer que $\dim\bigcap_{i=1}^{k}\ker\varphi_i=n-\mathrm{rg}\{\varphi_1,\ldots,\varphi_k\}$.

[**Indication:** $(\mathrm{Vect}\{\varphi_1,\ldots,\varphi_k\})^{\perp}=\bigcap_{i=1}^{k}\ker\varphi_i$.]

c) En pratique, lorsque $E=k^n$, on décrit généralement un sous-espace F soit par une famille génératrice, soit par un système d'équations. Comment passe-t-on (dans les deux sens) d'un type de description à l'autre ?

d) **Application numérique** : Soient a,b,c des scalaires. Donner un système d'équations pour l'espace image de $\begin{bmatrix}1&0\\a&1\\b&c\end{bmatrix}$

Exercice 9. — Soit E un espace vectoriel de dimension finie et F_1 et F_2 deux sev de E. Montrer que l'on a $F_1\subset F_2$ ssi $F_2^{\perp}\subset F_1^{\perp}$.
Application : Soient $\varphi,\varphi_1,\ldots,\varphi_p$ des formes linéaires sur E. Montrer que φ est combinaison linéaire de $\varphi_1,\ldots,\varphi_p$ ssi $\bigcap_i\ker\varphi_i\subset\ker\varphi$.

Exercice 10. — Soient $\varphi_1,\ldots,\varphi_n$ une famille de formes linéaires sur un espace vectoriel (de dimension finie) E. Soit $\Phi=\varphi_1\times\cdots\times\varphi_n$ l'application produit $E\to k^n$, c'est-à-dire telle que

$$\forall x\in E,\ \Phi(x)=(\varphi_1(x),\ldots,\varphi_n(x)).$$

Montrer que le rang de Φ est égal au rang de la famille $\{\varphi_1,\ldots,\varphi_n\}$.

Exercice 11. — Soit X un ensemble et F un sous-espace vectoriel de dimension d de l'espace des fonctions de X dans k. Pour tout $x\in X$, l'application $\mathrm{ev}_x : F\to k$ d'évaluation en x est une forme linéaire.
Montrer qu'il existe des points $x_1,\ldots,x_d\in X$ tels que $\{\mathrm{ev}_{x_1},\ldots,\mathrm{ev}_{x_d}\}$ forme une base de F^*.

Exercice 12. — Soit $n\geqslant 1$ un entier.

a) Soit ℓ une forme linéaire de $M_n(k)$ telle que

$$\forall A,B\in M_n(k),\ \ell(AB)=\ell(BA).$$

Montrer que ℓ est proportionnelle à la forme trace.

b) Soit V le sev de $M_n(k)$ *engendré* par les matrices de la forme $AB-BA$. Déterminer $V^{\perp}$ et en déduire que V est l'ensemble des matrices de trace nulle [(1)].

Exercice 13. — **Matrices magiques**
On considère les formes linéaires suivantes sur $M_n(k)$:

$$\forall\ 1\leqslant i\leqslant n,\ \ell_i(M):=\sum_j m_{i,j}\qquad\text{et}\qquad\forall\ 1\leqslant j\leqslant n,\ c_j(M):=\sum_i m_{i,j}$$

Montrer que la famille $\{l_1,\ldots,l_n,c_1,\ldots,c_n\}$ de $M_n(k)^*$ est de rang $2n-1$.
En déduire la dimension de $\{M\in M_n(k),\ \forall i,\ \ell_i(M)=0 \text{ et } \forall j,\ c_j(M)=0\}$.

1. Si k est de caractéristique nulle, alors on verra qu'une matrice de trace nulle est de la forme $AB-BA$. C'est en fait vrai sur tout corps.