Master 2 Agrégation, Mathématiques, Université de Nice Sophia-Antipolis,
UE4 - **Examen 2010-2011.**
Mardi 5 Avril 2011, Durée 2 h.

Exercice 1

Soit E un K espace vectoriel de dimension n et u un endomorphisme de E. On note m_u son polynôme minimal et χ_u son polynôme caractéristique. Soit x un vecteur non nul de E et p le plus petit entier tel que $(x, u(x), \cdots, u^p(x))$ soit liée.

1) Montrer qu'il existe un unique polynôme unitaire $R_x \in K_p[X]$ tel que $R_x(u)(x) = 0$. Que peut-on dire de l'ensemble $\{P \in K[X]/P(u)(x) = 0\}$?

2) Montrer que R_x divise le polynôme minimal de u.

3) Montrer que si $(e_1, \cdots, e_n)$ est une base de E alors m_u est le ppcm des polynômes $R_{e_1}, \cdots, R_{e_n}$.

4) Soit x et y des vecteurs de E tels que $R_x \wedge R_y = 1$. Montrer que $R_{x+y} = R_x R_y$.

5) Montrer qu'il existe $x \in E$ tel que $R_x = m_u$.

6) Montrer que les trois propriétés suivantes sont équivalentes.

i) $\chi_u = m_u$.
ii) il existe un vecteur $x \in E$ tel que $(x, u(x), \cdots, u^{n-1}(x))$ forme une base de E.
iii) l'une des matrices de u est de la forme $\begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & a_0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & a_1 \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots & a_2 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & a_{n-1} \end{pmatrix}$.

7) On suppose que $\chi_u = m_u$. Montrer que l'ensemble des endomorphismes de E qui commutent avec u est $K[u]$.

8) On suppose ici $K = \mathbb{C}$. Montrer que $\{u \in L(E)/\, \chi_u = m_u\}$ est un ouvert de $L(E)$.

9) Montrer par récurrence sur n que m_u et χ_u ont les mêmes diviseurs irréductibles pour tout $u \in L(E)$.

Exercice 2

Soit $A \in Gl_n(\mathbb{C})$. Montrer que $(A^k)_{k\in\mathbb{Z}}$ est bornée si et seulement si A est diagonalisable et toutes ses valeurs propres sont de module 1.

Exercice 3 (théorème de Müntz)

Soit K un corps quelconque et $(a_1, \cdots, a_n) \in K^n$ et $(b_1, \cdots, b_n) \in K^n$ des éléments de K tels que $a_i + b_j \neq 0$ pour tout $1 \leq i, j \leq n$.

1) On suppose les (a_i) distincts deux à deux. Montrer qu'il existe des scalaires $(\lambda_1, \cdots, \lambda_n) \in K^n$ tels que

$$R(X) = \frac{(b_1 - X)\cdots(b_{n-1} - X)}{(X + a_1)\cdots(X + a_n)} = \frac{\lambda_1}{X + a_1} + \cdots + \frac{\lambda_n}{X + a_n}$$

Calculer λ_n.

2) On pose

$$\Delta_n = \det \begin{pmatrix} \frac{1}{a_1+b_1} & \frac{1}{a_1+b_2} & \cdots & \frac{1}{a_1+b_n} \\ \frac{1}{a_2+b_1} & \frac{1}{a_2+b_2} & \cdots & \frac{1}{a_2+b_n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{1}{a_n+b_1} & \frac{1}{a_n+b_2} & \cdots & \frac{1}{a_n+b_n} \end{pmatrix}$$

Montrer que si les (a_i) sont distintcs, on a $\Delta_n = \frac{R(b_n)}{\lambda_n}\Delta_{n-1}$. En déduire, dans le cas général, la formule $\Delta_n = \frac{\left[\prod_{1\le i<j\le n}(a_i-a_j)\right]\left[\prod_{1\le i<j\le n}(b_i-b_j)\right]}{\prod_{1\le i,j\le n}(a_i+b_j)}$.

Soit $(E, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ un espace pré-Hilbertien et $(x_1,\cdots,x_n)$ une famille de vecteurs de E. On appelle matrice de Gram de la famille $(x_1,\cdots,x_n)$ la matrice $\big(\langle x_i, x_j\rangle\big)_{1\le i,j\le n}$ et on note $G(x_1,\cdots,x_n)$ son déterminant.

3) Soit x un point de E, V un sous-espace de dimension finie de E et $(f_1,\cdots,f_n)$ une base de V. Montrer qu'on a la formule suivante

$$\inf_{y\in V}\|x-y\|^2 = \frac{G(f_1,\cdots,f_n,x)}{G(f_1,\cdots,f_n)}.$$

Dans la suite E est l'espace des fonctions continues sur $[0,1]$ et $\langle f,g\rangle_2 = \int_0^1 f(x)g(x)\,dx$. On considère une suite strictement croissante $(\alpha_n)_{n\in N}$ de réels strictement positifs et on pose $V_N = \mathrm{Vect}\big\{x^{\alpha_1},\cdots,x^{\alpha_N}\big\}$.

4) Soit $m\in\mathbb{N}$. Montrer que $\inf_{y\in V_N}\|x^m-y\|_2^2 = \frac{1}{2m+1}\prod_{i=1}^N\big(\frac{1-m/\alpha_i}{1+(m+1)/\alpha_i}\big)^2$. En déduire l'espace $\mathrm{Vect}\{x^{\alpha_n}, n\in\mathbb{N}\}$ est dense dans $\mathcal{C}^0([0,1],\mathbb{R})$ si et seulement si la série $\sum_n\frac{1}{\alpha_n}$ diverge (on pourra utiliser le théorème de Weierstrass qui dit que $\mathbb{R}[X]$ est dense dans E).