Master 2 Agrégation, Mathématiques, Université de Nice Sophia-Antipolis,
***UE4* - Examen 2011-2012.**
Mardi 27 Avril 2012, Durée 2 h.

Exercice 1

1. Soit $A, B \in \mathscr{M}_n(K)$ telles que A est diagonalisable, $AB = BA$ et B inversible. Montrer que AB est diagonalisable si et seulement si B est diagonalisable.
2. On suppose que K est de caractéristique nulle. Soit N une matrice nilpotente telle que $e^N = I_n$. Calculer le polynôme minimal de N. En déduire que $N = 0$.
3. On suppose $K = \mathbb{C}$. Montrer que e^M est diagonalisable si et seulement si M est diagonalisable.
4. Trouver toutes les matrices de $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ telles que $e^M = I_n$.

Exercice 2

1. Déterminer signature de la forme quadratique $q(x, y) = 3x^2 - 2xy + y^2$ sur $\mathbb{R}^2$ et la nature de l'ensemble $\mathscr{C}_c = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / q(x, y) = c\}$ selon la valeur de c.
2. On définit par $Q(x, y, z) = x^2 + 2y^2 - z^2$ une forme quadratique sur $\mathbb{R}^3$. Soit $\mathscr{P}$ un plan vectoriel de $\mathbb{R}^3$. Montrer qu'il existe $(x, y, z) \in \mathscr{P}$ tel que $Q(x, y, z) > 0$. En déduire que la signature de la restriction $q_{\mathscr{P}}$ de Q à $\mathscr{P}$ prend nécessairement une des valeurs $(2, 0)$, $(1, 1)$ ou $(1, 0)$.
3. Dessiner dans $\mathbb{R}^3$ le cône isotrope $\mathscr{C}$ de Q et indiquer le signe de Q dans $\mathbb{R}^3$ sur le dessin. Quel est l'ensemble des plans $\mathscr{P}$ de $\mathbb{R}^3$ pour lesquels $q_{\mathscr{P}}$ est de signature $(2, 0)$ (resp.$(1, 1)$, $(1, 0)$) ?
4. Dans la suite, l'orthogonal d'un sous-ensemble de $\mathbb{R}^3$ est celui défini par la forme quadratique Q. Soit $(x, y, z) \in \mathscr{C} \setminus \{(0, 0, 0)\}$. Montrer que $\mathscr{P}_{(x,y,z)} = (x, y, z)^\perp$ est un plan de $\mathbb{R}^3$ tel que $q_{\mathscr{P}_{(x,y,z)}}$ soit de signature $(1, 0)$ (on pourra utiliser la question 2). En déduire que $(x, y, z)^\perp$ est le plan tangent de $\mathscr{C}$ en (x, y, z).
5. On note $D_0 = \{(0, 0, z)/z \in \mathbb{R}\}$. Calculer $D_0^\perp$.
6. Soit $\mathscr{P}$ un plan vectoriel de $\mathbb{R}^3$ interceptant $\mathscr{C} \setminus \{0\}$ de manière non tangente et ne contenant pas D_0. Montrer qu'il intercepte $\mathscr{C}$ en deux droites et que les deux plans tangents à $\mathscr{C}$ en ces droites s'interceptent selon $\mathscr{P}^\perp$.
7. soit D une droite de $\mathbb{R}^3$ différente de D_0 et $\mathscr{P}_1$, $\mathscr{P}_2$, $\mathscr{P}_3$ trois plans de $\mathbb{R}^3$ contenant D, interceptant $\mathscr{C} \setminus \{0\}$ de manière non tangente et ne contenant pas D_0. Pour tout $i = 1, 2, 3$, on note $P_{i,1}$ et $P_{i,2}$ les 2 plans tangents à $\mathscr{C}$ le long de $\mathscr{C} \cap \mathscr{P}_i$. Montrer que les trois droites $P_{1,1} \cap P_{1,2}$, $P_{2,1} \cap P_{2,2}$ et $P_{3,1} \cap P_{3,2}$ sont coplanaires.
8. Comment construire $D^\perp$ et $\mathscr{P}^\perp$ pour une droite vectorielle D et un plan vectoriel $\mathscr{P}$ quelconques de $\mathbb{R}^3$.

Exercice 3 (théorème de Müntz)

Soit K un corps quelconque et $(a_1, \cdots, a_n) \in K^n$ et $(b_1, \cdots, b_n) \in K^n$ des éléments de K tels que $a_i + b_j \neq 0$ pour tout $1 \leq i, j \leq n$.

1) On suppose les (a_i) distincts deux à deux. Montrer qu'il existe des scalaires $(\lambda_1, \cdots, \lambda_n) \in K^n$ tels que

$$R(X) = \frac{(b_1 - X) \cdots (b_{n-1} - X)}{(X + a_1) \cdots (X + a_n)} = \frac{\lambda_1}{X + a_1} + \cdots + \frac{\lambda_n}{X + a_n}$$

Calculer λ_n.

2) On pose

$$\Delta_n = \det \begin{pmatrix} \frac{1}{a_1+b_1} & \frac{1}{a_1+b_2} & \cdots & \frac{1}{a_1+b_n} \\ \frac{1}{a_2+b_1} & \frac{1}{a_2+b_2} & \cdots & \frac{1}{a_2+b_n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{1}{a_n+b_1} & \frac{1}{a_n+b_2} & \cdots & \frac{1}{a_n+b_n} \end{pmatrix}$$

Montrer que si les (a_i) sont distintcs, on a $\Delta_n = \frac{R(b_n)}{\lambda_n}\Delta_{n-1}$. En déduire, dans le cas général, la formule $\Delta_n = \frac{\left[\prod_{1\le i<j\le n}(a_i-a_j)\right]\left[\prod_{1\le i<j\le n}(b_i-b_j)\right]}{\prod_{1\le i,j\le n}(a_i+b_j)}$.

Soit $(E, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ un espace pré-Hilbertien et $(x_1,\cdots,x_n)$ une famille de vecteurs de E. On appelle matrice de Gram de la famille $(x_1,\cdots,x_n)$ la matrice $\big(\langle x_i, x_j\rangle\big)_{1\le i,j\le n}$ et on note $G(x_1,\cdots,x_n)$ son déterminant.

3) Soit x un point de E, V un sous-espace de dimension finie de E et $(f_1,\cdots,f_n)$ une base de V. Montrer qu'on a la formule suivante

$$\inf_{y\in V}\|x-y\|^2 = \frac{G(f_1,\cdots,f_n,x)}{G(f_1,\cdots,f_n)}.$$

Dans la suite E est l'espace des fonctions continues sur $[0,1]$ et $\langle f,g\rangle_2 = \int_0^1 f(x)g(x)\,dx$. On considère une suite strictement croissante $(\alpha_n)_{n\in N}$ de réels strictement positifs et on pose $V_N = \mathrm{Vect}\big\{x^{\alpha_1},\cdots,x^{\alpha_N}\big\}$.

4) Soit $m\in\mathbb{N}$. Montrer que $\inf_{y\in V_N}\|x^m-y\|_2^2 = \frac{1}{2m+1}\prod_{i=1}^N\left(\frac{1-m/\alpha_i}{1+(m+1)/\alpha_i}\right)^2$. En déduire l'espace $\mathrm{Vect}\{x^{\alpha_n}, n\in\mathbb{N}\}$ est dense dans $\mathcal{C}^0([0,1],\mathbb{R})$ si et seulement si la série $\sum_n \frac{1}{\alpha_n}$ diverge (on pourra utiliser le théorème de Weierstrass qui dit que $\mathbb{R}[X]$ est dense dans E).