Master 2 Agrégation, Mathématiques, Université de Nice Sophia-Antipolis,
UE4 - **Examen 2012-2013.**
Mardi 18 Mars 2013, Durée 2 h.

Exercice 1

1. Soit $M \in Gl_n(\mathbb{R})$. On note $B = (c_1, \cdots, c_n)$ les vecteurs colonnes de la matrice M. Montrer qu'ils forment une base de $\mathbb{R}^n$. On note B' la base de $\mathbb{R}^n$ obtenue par orthonormalisation de Schmidt appliquée à B (pour le produit scalaire canonique). Quelle propriété a la matrice de passage de la base B à la base B' ? et la matrice de passage de la base canonique de $\mathbb{R}^n$ à la base B' ?

   En déduire que $M = OT$, où O est une matrice orthogonale et T est une matrice triangulaire supérieure. Montrer qu'une telle décomposition existe en fait pour toute matrice M de $M_n(\mathbb{R})$. Montrer qu'une matrice M est symétrique et positive ssi il existe une matrice triangulaire supérieure T telle que $M = {}^t TT$.
2. Soit $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace Euclidien et $u \in Gl(E)$. Montrer qu'il existe une base orthonormée (e_i) de E telle que $\big(u(e_i)\big)$ soit une base orthogonale de E.
3. Soit f une forme bilinéaire symétrique sur E et S sa matrice dans une base $B = (e_1, \cdots, e_n)$ de E. Montrer qu'une base orthonormée de $\mathbb{R}^n$ (pour le produit scalaire canonique) $B' = (c_1, \cdots, c_n)$, constituée de vecteurs propres de S définie une base $E_j = \sum_i C_{ij} e_i$ de E qui est f-orthogonale (où on a posé $c_j = (C_{ij})_{1 \leqslant i \leqslant n}$).

   En déduire une base de $\mathbb{R}^3$ orthogonale pour la forme quadratique $q(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2xz$. Obtenir une autre base orthogonale de q en passant par la décomposition de Gauss de q et en calculant une "base antéduale" associée à la famille des formes linéaires apparaissant dans la décomposition.

   Remarque Ces deux méthodes marchent pour toute forme bilinéaire symétrique. Toutefois la première ne peut être appliquée que si on sait trouver les racines du polynôme caractéristique de S, alors que dans la deuxième, on sait finir le calcul dans tous les cas.

Exercice 2 Soit E un K-espace vectoriel de dimension finie. On dit que $u \in L(E)$ est semi-simple si tout sous-espace vectoriel de E stable par u admet un supplémentaire stable par u.

1. On suppose que K est algébriquement clos. Montrer que $u \in L(E)$ est semi-simple ssi u est diagonalisable.
2. Montrer que si u est semi-simple alors dans la décomposition de son polynôme minimal m_u en facteurs irréductibles dans $K[X]$, tous les facteurs sont de multiplicité 1.
3. On suppose que m_u est irréductible dans $K[X]$. Que peut-on dire de l'anneau $L = K[x]/(m_u)$?
   (a) Montrer que l'espace vectoriel E peut-être muni d'une structure de L-espace vectoriel avec la multiplication externe définie par $P \cdot x = P\big(u\big)(x)$ pour tout $P \in L$ et tout $x \in E$.
   (b) Montrer que F est un K-sous-espace vectoriel de E stable par u ssi F est un L-sous-espace vectoriel de E.
   (c) En déduire que u est semi-simple.
4. Montrer que si le polynôme minimal de u est sans facteurs carrés dans sa décomposition en facteurs irréductibles dans $K[x]$, alors u est semi-simple.
5. Montrer que si u est semi-simple, alors pour tout sous-espace F de E stable par u, la restriction de u à F est semi-simple.
6. Quels sont les endomorphismes nilpotents de u qui sont semi-simples ?
7. On suppose que $K = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Montrer qu'il existe un unique couple (s, v) d'endomorphismes de E tel que s soit semi-simple, v soit nilpotent, s et v commutent et $u = s + v$ (théorème de Dunford-Schwarz généralisé).