Agrégation externe de Mathématiques

TD Famille libre, famille génératrice, dimension

E. Aubry

Exercice 1 *Soit $(P_i)_{i\in\mathbb{N}}$ une famille de polynômes de $K[X]$ (resp. unitaires de $A[X]$) tels que* $\deg P_i = i$ *pour tout $i \in \mathbb{N}$. Montrer que (P_i) forme une base de $K[X]$ (resp. de $A[X]$).*

Exercice 2 *Soit E un K-espace vectoriel de dimension finie et $(F_i)_{i\in I}$ une famille de sous-espaces vectoriels de E. Montrer qu'il existe des sous ensembles finis J et K de I tels que $\cap_{i\in I} F_i = \cap_{j\in J} F_j$ et $\sum_{i\in I} F_i = \sum_{k\in K} F_k$.*

Exercice 3 *Soit E un A-module libre de base $(e_i)_{i\in I}$. Montrer que E est isomorphe à $A^{(I)}$. On note E^* le module dual (i.e. l'ensemble des applications linéaires de E dans A). Montrer que E^* est isomorphe à A^I.*

Exercice 4 *Soit K un corps et $(x_1, \cdots, x_n) \in K^n$ des points distincts. Montrer que pour tout $(\alpha_1, \cdots, \alpha_n) \in K^n$, il existe un unique $P \in K_{n-1}[X]$ tel que $P(x_i) = \alpha_i$ pour tout $1 \leq i \leq n$. A quelles conditions la propriété reste vraie, si on remplace le corps K par l'anneau $\mathbb{Z}$?*

Exercice 5 *Soit $K \subset K'$ deux corps commutatifs et E un K'-espace vectoriel. Montrer que si E est de dimension finie sur K' et si K' est de dimension finie sur K alors E est de dimension finie sur K et qu'on a $\dim_K E = \dim_K K' \cdot \dim_{K'} E$. Montrer que si E est de dimension finie sur K alors il est de dimension finie sur K' et que si $E \neq \{0\}$ alors K' est de dimension finie sur K.*

En déduire qu'il n'existe pas de corps intermédiaire entre $\mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$. Montrer que si K est un corps fini de caractéristique p alors il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $\#K = p^n$.

Exercice 6 *Caractériser les vecteurs $(a, b) \in \mathbb{Z}^2$ qui peuvent être complété en une base du $\mathbb{Z}$ module $\mathbb{Z}^2$. Trouver tous les vecteurs (c, d) tels que $\big((2, 3); (c, d)\big)$ forme une base de $\mathbb{Z}^2$.*

Exercice 7 *Soit E et F des K-espaces vectoriels de dimension n et p, et $f \in \mathcal{L}(E, F)$ de rang r. Calculer la dimension du sous-espace A de $\mathcal{L}(F, E)$ défini par $A = \{g \in \mathcal{L}(F, E) / f \circ g \circ f = 0\}$.*

Exercice 8 *Soit E un K-espace vectoriel de dimension finie et $f \in \mathcal{L}(E)$. Montrer qu'il existe $P \in K[X]$ tel que $P(f) = 0$.*

Exercice 9 *Soit f un endomorphisme de $\mathbb{R}^8$ tel que* $\mathrm{rg} f^2 = 4$. *Quels sont les rangs de f possibles?*

Exercice 10 *Soit $x_0 = -\infty$, $x_{n+1} = +\infty$ et $x_1 < \cdots < x_n$ des réels. Quelle est la dimension de l'espace des fonctions $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ dont la restriction à chaque $]x_i, x_{i+1}[$ est un polynôme de dégré au plus 2?*

Exercice 11 *Soit p un nombre premier, F un corps de cardinal p^n et E un F-espace vectoriel de dimension n. Quels sont les nombres d'éléments, de bases, d'endomorphismes et d'automorphismes de E?*

Exercice 12 *Soit K un sous-corps de L. Un élément $\alpha \in L$ est dit algèbrique sur K s'il existe $P \in K[X]$ tel que $P(\alpha) = 0$. Montrer que α est algèbrique sur K ssi $K[\alpha]$ est un corps ssi $K[\alpha]$ est un K espace vectoriel de dimension finie. En déduire que l'ensemble des éléments de L algèbriques sur K est un corps.*