Agrégation externe de Mathématiques

TD Dualité

E. Aubry

Exercice 1: Soit E et F deux K-espaces vectoriels de base $\mathcal{B} = (e_1, \cdots, e_n)$ et $\mathcal{B}' = (f_1, \cdots, f_m)$, et $u \in \mathcal{L}(E, F)$. Montrer que si $A = \mathcal{M}at_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'} u$, alors $\mathcal{M}at_{\mathcal{B}'^*, \mathcal{B}^*}\, {}^t u = {}^t A$.

On suppose maintenant que $E = F$. Soit P la matrice de passage entre la base $\mathcal{B}$ et la base $\mathcal{B}'$. Calculer la matrice de passage entre la base $\mathcal{B}^*$ et la base $\mathcal{B}'^*$.

Exercice 2: Soit E et F des K-espaces vectoriels, $L : E \to F$ une application linéaire et $\mathcal{B}$ une base de $\ker {}^t L$. Montrer que $y \in \operatorname{im} L$ ssi $\alpha(y) = 0$ pour tout $\alpha \in \mathcal{B}$.

Exercice 3: Sur $\mathcal{M}_n(K)$ on définit $l_i(M) = \sum_j m_{ij}$ et $c_i(M) = \sum_j m_{ji}$. Calculer le rang de la famille $(l_1, \cdots, l_n, c_1, \cdots, c_n)$. En déduire que pour tout $k \in K$, il existe une matrice $M \in \mathcal{M}_n(K)$ telle que $\sum_j m_{ji} = k = \sum_j m_{ij}$ pour tout $i \in \{1, \cdots, n\}$. Que peut-on dire de l'ensemble des matrices vérifiant cette propriété? Caractériser les $(\lambda_1, \cdots, \lambda_{2n}) \in K^{2n}$ pour lesquels il existe $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ vérifiant $l_i(M) = \lambda_i$ et $c_i(M) = \lambda_{i+n}$ pour tout $i \in \{1, \cdots, n\}$.

Exercice 4: Soit $(x_0, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ des points distincts. Montrer que pour tout $P \in \mathbb{R}_n[X]$, le coefficient devant X^n dans P est donné par

$$a_n(P) = \sum_{k=0}^{n} \frac{P(x_k)}{\prod_{j \neq k} x_k - x_j}$$

et que le coefficient constant vérifie

$$a_0(P) = (-1)^n \sum_{k=0}^{n} P(x_k) \frac{\prod_{j \neq k} x_j}{\prod_{j \neq k} x_k - x_j}$$

Exercice 5: Soit $w :]a, b[\to \mathbb{R}$ positive non nulle et telle que $\int_a^b t^k w(t)\, dt$ soit intégrable pour tout $k \in \mathbb{N}$. Soit $(x_0, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ des points distincts. Montrer qu'il existe $(\lambda_0, \cdots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ tel que pour tout $P \in \mathbb{R}_n[X]$, on ait $\int_a^b P(t) w(t)\, dt = \sum_{i=0}^n \lambda_i P(x_i)$.

On suppose maintenant que $n = 2k - 1$. Montrer que $\varphi : Q \in \mathbb{R}_k[X] \mapsto (P \mapsto \int_a^b PQw) \in (\mathbb{R}_k[X])^*$ est un isomorphisme. En déduire qu'il existe $Q_0 \in \mathbb{R}_k[X] \setminus \{0\}$ tel que $\int_a^b PQ_0 w = 0$ pour tout $P \in \mathbb{R}_{k-1}[X]$. Montrer que Q_0 est scindé à racines simples (montrer que sinon, on peut trouver $P \in \mathbb{R}_{k-1}[X]$ tel que $PQ_0 \geq 0$ sur $\mathbb{R}$). On note $(x_1, \cdots, x_k)$ les racines de Q_0. Montrer qu'il existe $(\lambda_1, \cdots, \lambda_k) \in \mathbb{R}^k$ tel que $\int_a^b Pw = \sum_{i=1}^k \lambda_i P(x_i)$ pour tout $P \in \mathbb{R}_{2k-1}[X]$.

Exercice 6: Soit $x_0 = -\infty$, $x_{n+1} = +\infty$ et $x_1 < \cdots < x_n$ des réels. Quelle est la dimension de l'espace des fonctions $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ dont la restriction à chaque $]x_i, x_{i+1}[$ est un polynôme de dégré au plus 2?