Agrégation externe de Mathématiques

TD: Dunford-Schwarz et Applications

E. AUBRY

Références:

J.-M. Arnaudiès, J. Bertin "Groupes, algèbres et géométrie",

J. Fresnel "Algèbre des matrices",

X. Gourdon "Les Maths en tête, Algèbre",

E. Leichtnam "Exercices de mathématiques, Algèbre et géométrie",

H. Roudier "Algèbre linéaire",

V. Beck, J. Malick, G. Peyré "Objectif Agrégation".

1 Existence et Calcul

Exercice 1 Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. On suppose que $\chi_u = \prod_{i=1}^{k}(X-\lambda_i)^{\alpha_i}$ et donc $m_u = \prod_{i=1}^{k}(X-\lambda_i)^{\beta_i}$ avec $1 \leqslant \beta_i \leqslant \alpha_i$ pour tout $i \leqslant k$. $E_i = \ker(u-\lambda_i Id)^{\alpha_i}$ est appelé sous-espace caractéristique de u associé à la valeur propre λ_i. Montrer les propriétés suivantes:

1. $E = \oplus_{i=1}^{k} E_i$ et $E_i = \ker(u-\lambda_i Id)^{\beta_i}$.
2. La restriction de $u-\lambda_i Id$ à E_i est nilpotente d'indice β_i.
3. Si on note π_i la projection sur E_i de noyau $\oplus_{j\neq i} E_j$ alors $d = \sum_i \lambda_i \pi_i$ est diagonalisable, $n = u-d$ est nilpotente et $dn = nd$.
4. Montrer qu'il existe une base de E dans laquelle la matrice de u triangulaire supérieure, celle de d est diagonale et celle de n triangulaire supérieure à diagonale nulle. En déduire que $\dim E_i = \alpha_i$ et $\det u = \det d$.
5. Montrer que si $A \in \mathcal{M}_n(K)$ est une matrice de polynôme caractéristique scindé alors A est semblable à $D+N$ avec D diagonale et N triangulaire supérieure à diagonale nulle.

Exercice 2 (Calcul "pratique")
1) Soit u un endomorphisme de polynôme caractéristique scindé ($\chi_u = \prod_{i=1}^{k}(X-\lambda_i)^{\alpha_i}$). En mettant $\frac{1}{\chi_u}$ en élément simples montrer qu'on obtient des polynômes Q_i tels que $1 = \sum_{i=1}^{k} Q_i P_i$, où $P_i = \prod_{j=1, j\neq i}^{k}(X-\lambda_j)^{\alpha_j}$. Montrer que $\pi_i = P_i Q_i(u)$ est le projecteur spectral sur l'espace caractéristique associé à λ_i. En déduire que $d = \sum_i \lambda_i \pi_i$ et $n = u - d$.

2) Calculer la décomposition de Dunford de la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

Exercice 3 (Calcul plus pratique)
Dans la méthode précédente, on a besoin de savoir factoriser un polynôme annulateur de u pour trouver les projecteurs spectraux puis d et n. On va voir une méthode ou une telle factorisation n'est pas utile. On reprend les notations de l'exercice précédent.
1) Montrer que le polynôme minimal de d est $P = \prod_{i=1}^{k}(X-\lambda_i)$ et que si k est de caractéristique 0 alors on a $P = \chi_u/(\chi_u \wedge \chi_u')$. Comment calculer P sans factoriser χ_u?

On va donc chercher d dans $K[u]$ solution de $P(d) = 0$. Pour cela on applique la méthode de Newton. On pose $u_0 = u$ et $u_{n+1} = u_n - P(u_n) \circ (P'(u_n))^{-1}$.
2) On suppose $k \geqslant 2$. Montrer qu'il existe $Q \in K[X,Y]$ tel que

$$P(Y) = P(X) + (Y-X)P'(X) + (Y-X)^2 Q(X,Y) \qquad \text{(utiliser Taylor)}.$$

3) Montrer que si $a \in k[u]$ est inversible dans $k[u]$ et $b \in k[u]$ est nilpotente, alors $a+b$ est inversible dans $k[u]$.
4) Montrer que $P'(u)^{-1}$ est un polynôme en u et que $P(u)$ est nilpotent. En déduire que u_1 est bien défini et un polynôme en u, que $P(u_1)$ est nilpotent et que $P'(u_1)^{-1}$ est un polynôme en u. Itérer le procédé pour montrer que les u_i sont bien définis pour tout $i \in \mathbb{N}$ et des polynômes en u.
5) Montrer que $P(u_k) = \left(P(u)\right)^{2^k} Q_k(u)$ pour tout $k \in \mathbb{N}$. En déduire que la suite $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est stationnaire, que la limite u_∞ est diagonalisable et que $u - u_\infty$ est nilpotent. En déduire que $d = u_\infty$ et $n = u - u_\infty$.

2 Applications

Exercice 4 *Soit $A \in Gl_n(\mathbb{C})$. Calculer la décomposition de Dunford de e^A en fonction de celle de A. Montrer que A est diagonalisable ssi e^A est diagonalisable. En déduire l'ensemble des matrices vérifiant $e^A = I_n$.*

Montrer que si e^{tA} reste bornée lorsque t tend vers $+\infty$ alors toutes ses valeurs propres ont une partie réelle négative. Montrer que si toutes les valeurs propres de A ont une partie réelle strictement négative alors e^{tA} reste bornée lorsque t tend vers $+\infty$.

Exercice 5 Soit $N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ une matrice nilpotente. Montrer que $M_t = -\sum_{k=1}^{n-1} \frac{(-tN)^k}{k}$ vérifie $I_n + tN = e^{M_t}$ pour tout $t \in [0,1]$. En déduire que pour tout $A \in \mathcal{G}l_n(\mathbb{C})$, il existe $P \in \mathbb{C}[X]$ telle que $A = e^{P(A)}$. A-t-on la même propriété si A n'est pas inversible? En remplaçant $\mathbb{C}$ par $\mathbb{R}$?

Exercice 6 (rayon spectral) Soit $f(z) = \sum_{k\in\mathbb{N}} a_k z^k$ de rayon R. Montrer que si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ vérifie $\|A\| < R$, où $\|\cdot\|$ est une norme d'opérateur alors $\sum_{k\in\mathbb{N}} a_k A^k$ converge dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

On appelle rayon spectral de A le réel $\rho(A) = \sup\{|\lambda|, \lambda$ valeur propre de $A\}$.

1) Montrer que $\rho(A) = \inf\{\|A\|$, où $\|\cdot\|$ est une norme d'opérateur sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})\}$.

2) Soit $\|\cdot\|$ une norme d'opérateur sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Montrer que $l_k = \|A^k\|$ vérifie $l_{k+p} \leq l_k l_p$ pour tout $(k,p) \in \mathbb{N}$. En déduire que $l_k^{\frac{1}{k}} \to \inf\{l_k^{\frac{1}{k}}, k \in \mathbb{N}\}$ puis que $\rho(A) = \lim_{k\to\infty} \|A^k\|^{\frac{1}{k}}$ pour toute norme sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

3) En déduire que $\sum_{k\in\mathbb{N}} a_k A^k$ converge si $\rho(A) < R$ et diverge si $\rho(A) > R$.

4) Montrer que pour tout $(A,B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, on a $\rho(AB) = \rho(BA)$.