Agrégation externe de Mathématiques

TD: Endomorphismes nilpotents

E. AUBRY

<u>Références</u>:

J.-M. Arnaudiès, J. Bertin "Groupes, algèbres et géométrie",

J. Fresnel "Algèbre des matrices", X. Gourdon "Les Maths en tête, Algèbre",

E. Leichtnam "Exercices de mathématiques, Algèbre et géométrie",

H. Roudier "Algèbre linéaire".

Exercice 1 *Soit* $u \in \mathcal{L}(E)$. *On pose* $I_k = \operatorname{Im} u^k$ *et* $N_k = \operatorname{Ker} u^k$. *Montrer que la suite* $a_k = \dim I_k - \dim I_{k+1}$ *est positive et décroissante. En déduire que les suites* $\big(N_k\big)_{k\in\mathbb{N}}$ *et* $\big(I_k\big)_{k\in\mathbb{N}}$ *sont strictement monotones jusqu'à un rang* d *puis constantes* ($d = \inf\{k \in \mathbb{N}/ \operatorname{Ker} u^k = \operatorname{Ker} u^{k+1}\} = \inf\{k \in \mathbb{N}/ \operatorname{Im} u^k = \operatorname{Im} u^{k+1}\}$. d *est appelé indice de* u. *Montrer que* $d \leq n$ *et* $E = \operatorname{Im} u^d \oplus \operatorname{Ker} u^d$.

Exercice 2 *Soit* u *un endomorphisme d'un* K*-espace vectoriel* E *de dimension* n. *Montrer que* u *est nilpotent ssi il existe une base de* E *dans laquelle la matrice de* u *est triangulaire supétrieure à diagonale nulle. Montrer que* u *est nilpotent ssi le polynôme caractéristique de* u *est* X^n.

Exercice 3 *Soit* K *un corps de caractéristique* k *et* E *un* K*-espace vectoriel de dimension* n *non divisible par* k. *Montrer que* $u \in \mathcal{L}(E)$ *est nilpotent ssi* $\operatorname{tr}(u^k) = 0$ *pour tout* $k \in \{1, \cdots, n\}$ *(indic. on pourra utiliser l'exercice précédent et faire une récurrence sur la dimension de* E*).*

Exercice 4 *On raffine l'exercice 2. Soit* u *un endomorphisme nilpotent d'indice* d. *On reprend les notations de l'exercice 1. Soit* G_{d-1} *tel que* $N_d = E = N_{d-1} \oplus G_{d-1}$ *et* $\big(e_1^{(d-1)}, \cdots, e_{a_{d-1}}^{(d-1)}\big)$ *une base de* G_{d-1}. *Montrer que la famille* $\big(e_1^{(d-1)}, u(e_1^{(d-1)}), \cdots, u^{d-1}(e_1^{(d-1)}), \cdots, e_{a_{d-1}}^{(d-1)}, u(e_{a_{d-1}}^{(d-1)}), \cdots, u^{d-1}(e_{a_{d-1}}^{(d-1)})\big)$ *forme une famille libre de* E.

Montrer qu'il G_{d-2} *tel que* $N_{d-1} = N_{d-2} \oplus u(G_{d-1}) \oplus G_{d-2}$ *et que si* $\big(e_1^{(d-2)}, \cdots, e_{a_{d-2}}^{(d-2)}\big)$ *une base de* G_{d-2}, *alors la famille* $\big(u^j(e_i^{(d-1)})\big)_{i\leqslant a_{d-1}, j\leqslant d-1} \cup \big(u^j(e_i^{(d-2)}\big)_{i\leqslant a_{d_2}, j\leqslant d-2}$ *forme une famille libre de* E.

En itérant la construction, montrer qu'il existe une base de E *dans laquelle la matrice de* u *est une matrice de Jordan.*

Généraliser aux endomorphismes dont le polynôme caractéristique est scindé.

Exercice 5 *Soit* $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. *Montrer que* M *et* ${}^tM$ *sont semblables.*

CNS pour que M *et* $2M$ *soient semblables.*

Montrer que toute matrice de la forme $I_n + N$ *avec* N *nilpotente est l'image d'une matrice nilpotente par l'exponentielle matricielle.*