Agrégation externe de Mathématiques

TD: $Gl(E)$ et ses sous-groupes

E. AUBRY

Références:

M. Alessandri *Thèmes de géométrie*, M. Berger *Géométrie*,

R. Goblot *thèmes de géométrie*, X. Gourdon *Algèbre*,

R. Mneimné, F. Testard *Groupes de Lie classiques*, *D. Perrin cours d'algèbre* ,

P. Tauvel *Mathématiques générales pour l'agrégation.*

Dans tout le TD $K = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et E est un K-espace vectoriel de dimension n.

1 $Gl(E)$ et $Sl(E)$

Exercice 1 *Montrer que $Gl(E)$* **est un ouvert dense dans End(E)**.

Exercice 2 *Soit G un sous groupe de $Gl(E)$ tel que $g^2 = Id$ pour tout $g \in G$. Montrer que $CardG \leq 2^{\dim E}$ (on pourra commencer par montrer que G est abélien). En déduire que $Gl(E)$ est* **isomorphe à** *$Gl(F)$* **si et seulement si** *E* **est isomorphe à** *F.*

Exercice 3 *On suppose $K = \mathbb{C}$. Soit $A \in Gl(E)$. Montrer que $P(\lambda) = \det\big(A + \lambda(Id - A)\big)$ est un polynôme non nul. En déduire que $\mathbb{C} \setminus \{\lambda \in \mathbb{C}/P(\lambda) = 0\}$ puis $Gl(E)$ sont connexes par arcs.*

Exercice 4 *On note $Sl(E) = \{u \in Gl(E)/\det u = 1\}$. Pour tout forme linéaire α de E et tout $y \in E$, on définit un endomorphisme de E en posant $(\alpha \otimes y)(x) = \alpha(x)y$. Montrer que si $\alpha \neq 0$ et si $y \in (\operatorname{Ker}\alpha) \setminus \{0\}$, alors $Id + \alpha \otimes y \in Sl(E) \setminus \{Id\}$ et que l'ensemble de ses points fixes est un hyperplan (ces endomorphismes sont appelés les transvections de E). Montrer réciproquement que si $u \in Sl(E) \setminus \{Id\}$ stabilise un hyperplan alors u est une transvection de E.*

Exercice 5 *Montrer que* **le centre ZGl(E)** *de $Gl(E)$* **est $\mathbf{K}^*$.Id** *et que*

$$\mathbf{ZSl(E)} = \begin{cases} \{\mathbf{e^{i2\pi k/n}.Id/\, k \in \{0, \cdots, n-1\}}\} & \text{si } \mathbf{K} = \mathbb{C}, \\ \{\mathbf{Id}\} & \text{si } \mathbf{K} = \mathbb{R} \text{ et } \dim \mathbf{E} \text{ est impaire}, \\ \{\mathbf{-Id, Id}\} & \text{si } \mathbf{K} = \mathbb{R} \text{ et } \dim \mathbf{E} \text{ est paire}. \end{cases}$$

Exercice 6 *Soit $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$, α une forme linéaire non nulle de E et $y \in E$ tel que $\alpha(y) = 1$. Montrer que $Id + (\lambda - 1)\alpha \otimes y$ est un endomorphisme $\neq Id$ de déterminant λ et qui stabilise un hyperplan (ces endomorphismes sont appelés les dilatations de rapport λ de E).*

Réciproquement, monter que si $u \neq Id$ stabilise un hyperplan et vérifie $\det u = \lambda \neq 1$ alors u est une dilatation de E.

Exercice 7 *Soit F un sous-espace de E et x_1, x_2 deux vecteurs tels que $\dim(F \oplus Kx_1 \oplus Kx_2) = \dim F + 2$. Montrer qu'il existe une transvection v de E telle que $v(x_1) = x_2$.*

Montrer que tout élément de $Sl(E)$ est le produit d'un nombre fini de transvection et que tout élément u de $Gl(E) \setminus Sl(E)$ est le produit d'une dilatation de rapport $\det u$ et d'un nombre fini de transvection (on pourra faire une récurrence descendante sur la dimension de $\mathrm{Ker}\,(u - Id)$). Donner une borne supérieure du nombre de transvections nécessaires à la décomposition de u en fonction de $\dim \mathrm{Ker}\,(u - Id)$.

Exercice 8 *Soit $\mathcal{B} = (e_1, \cdots, e_n)$ une base de E et $\mathcal{B}^* = (\alpha_1, \cdots, \alpha_n)$ sa base duale. Montrer que pour tout $i \neq j$, la transvection $Id + \lambda\alpha_i \otimes e_j$ (resp. la dilatation $Id + (\lambda - 1)\alpha_n \otimes e_n$) est de matrice $B_{ij}(\lambda) = I_n + \lambda.E_{ij}$ (resp. $Diag(1, \cdots, 1, \lambda)$) dans la base $\mathcal{B}$. En considérant la matrice A de u dans la base $\mathcal{B}$ et le résultat de la multiplication de A par une matrice $B_{ij}(-\lambda)$ (à gauche et à droite), retrouver le résultat de l'exercice précédent.*

Exercice 9 *Montrer que* **$\mathbf{Sl(E)}$ est connexe** *et que* **si $\mathbf{K} = \mathbb{R}$, alors $\mathbf{Gl(E)}$ a deux composantes connexes $\mathbf{Gl^+(E) = \{u \in Gl(E)/ \det u > 0\}}$ et $\mathbf{Gl^-(E) = \{u \in Gl(E)/ \det u < 0\}}$, et qu'elles sont homéomorphes**.

Exercice 10 *Si $n \geq 3$, montrer que pour tout (i, j, k) deux à deux distincts on a*

$$B_{ij}(\lambda\mu) = B_{ik}(\lambda)B_{kj}(\mu)[B_{ik}(\lambda)]^{-1}[B_{kj}(\mu)]^{-1}$$

Si $n = 2$, montrer que

$$B_{12}(\lambda) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix} B_{12}(\lambda/3) \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix}^{-1} [B_{12}(\lambda/3)]^{-1}$$

En déduire que **le groupe dérivé de $Sl(E)$ (resp. de $Gl(E)$) est $Sl(E)$.**

Exercice 11 *Soit G un sous-groupe de $Gl(E)$ non contenu dans K^*Id et tel que $sGs^{-1} \subset G$ pour tout $s \in Sl(E)$. On va montrer qu'alors $G \supset Sl(E)$. En particulier,* **$\mathbf{PSl(E) := Sl(E)/ZSl(E)}$ est simple** *et* **un sous groupe distingué de $Gl(E)$ est soit contenu dans K^*Id, soit contient $Sl(E)$.**

1) On suppose $n \geq 3$. En utilisant $G \not\subset K^*Id$ et la preuve de l'exercice 5, montrer qu'il existe $u \in G$ et une transvection $Id + \alpha \otimes y$ tels que $u' = u^{-1} \circ (Id - \alpha \otimes y) \circ u \circ (Id + \alpha \otimes y) \in G \setminus \{Id\}$.

Montrer que $F = \big(\mathrm{Ker}\,\alpha \cap \mathrm{Ker}\,\alpha \circ u\big)$ contient un vecteur $z \neq 0$ et que $u'(z) = z$.

Montrer que si ${}^tu'(\beta) = \beta$ pour tout $\beta \in z^\perp$, alors ${}^tu'$ et u' sont des transvections.

Montrer que si ${}^tu'(\beta) \neq \beta$ pour $\beta \in z^\perp$, alors $v = (u')^{-1} \circ (Id - \beta \otimes z) \circ u' \circ (Id + \beta \otimes z) = Id + (\beta - \beta \circ u') \otimes z$ est une transvection.

En déduire que G contient toujours une transvection puis que $Sl(E) \subset G$ (montrer que toutes les transvections sont conjuguées dans $Sl(E)$).

2) On suppose $n = 2$. Montrer qu'il existe $u \in G$ et une transvection $Id + \alpha \otimes y$ telle que $u' = u^{-1} \circ (Id - \alpha \otimes y) \circ u \circ (Id + \alpha \otimes y) \in G \setminus \{K^*Id\}$. En déduire qu'il existe $e_1 \in E$ tel que $\big(e_1, u'(e_1)\big)$ soit une base de E. Montrer que la matrice de u' dans la base $\big(e_1, u'(e_2)\big)$ est de la forme $U' = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & v \end{pmatrix}$.

On pose $B = \begin{pmatrix} v/\sqrt{2} & \sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} & 0 \end{pmatrix}$ et $T_\lambda = \begin{pmatrix} 1 & \lambda/3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Alors $A = B^{-1}(U')^{-1}BU'$ est la matrice d'un élément de G et $AT_\lambda A^{-1}T_\lambda^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & \lambda \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ est encore la matrice d'un élément de G. Comme $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \lambda & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -\lambda \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}^{-1}$, en déduire que $Sl_2(K) \subset G$.

2 $O(E)$ et $SO(E)$

Soit $(E, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ un espace euclidien. On appelle réflexion de E toute symétrie orthogonale par rapport à un hyperplan de E. On appelle retournement de E toute symétrie orthogonale par rapport à un sous espace de codimension 2 (montrer que c'est alors un élément de $SO(n)$).

Exercice 12 *Soit $u \in O(E)$. Montrer que E est la somme orthogonale de $E_1(u)$, $E_{-1}(u)$ et de plans stables par u (on pourra montrer que $u + u^{-1}$ est autoadjoint). En déduire qu'il existe une BON de E dans laquelle la matrice de u est de la forme:*

$$\begin{pmatrix} I_p & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & -I_q & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & R(\theta_1) & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & R(\theta_k) \end{pmatrix}$$

où $R(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$.

Exercice 13 *Montrer que $SO(E)$* **est compact et connexe par arcs** *et que $O(E)$* **est compact et admet deux composantes connexes homéomorphes**.

Exercice 14 *Soit $u \in O(E) \setminus \{Id\}$ et $k = \dim \operatorname{Ker}(u - id)$. Montrer qu'il existe $p \leq n - k$ réflexions (s_i) telles que $u = s_1 \circ \cdots \circ s_p$. Montrer qu'alors $\operatorname{Ker}(u - id) \supset \cap_{i=1}^{p} \operatorname{Ker}(s_i - id)$ et donc que u est le produit de $n - k$ réflexions. Montrer que, par contre, u est le produit de deux symétries orthogonales.*

Montrer que $R(\theta) = R(\theta/2)\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} R(-\theta/2)\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. On suppose $n \geq 3$ et $u \in SO(E) \setminus \{Id\}$. Montrer que u est le produit d'un nombre pair de retournements.

Exercice 15 *Calculer $ZO(E)$ et $ZSO(E)$ (distinguer les cas $n = 2$, n paire et nimpaire).*

Exercice 16 *Montrer que si s et s' sont des réflexions (resp. des retournements) alors elles sont conjuguées dans $O(E)$ (resp. dans $SO(E)$).*

En déduire que **le groupe dérivé de $O(E)$ est $SO(E)$ (si $n \geq 2$)**. *Montrer que* **le groupe dérivé de $SO(E)$ est $SO(E)$ (si $n \geq 3$)**. *Montrer que si $\mu : (O(E), \circ) \to (\mathbb{R}, +)$ est un morphisme de groupe, alors $\mu \equiv 0$.*

Exercice 17 *Soit $G \neq \{Id\}$ un sous groupe distingué de $SO(3)$ et $u \in G \setminus \{Id\}$. Montrer qu'il existe une b.o.n. $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ de E telle que $Mat_{\mathcal{B}} u = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$. En considérant les itérés de u, montrer qu'on peut supposer $\theta \in]\pi/2, \pi]$. On pose $x_t = \cos t \cdot e_1 + \sin t \cdot e_2$, montrer qu'il existe $t_0 \in]0, 1[$ tel que $\langle u(x_{t_0}), x_{t_0}\rangle = 0$. On note s la symétrie orthogonale par rapport à $\mathbb{R} \cdot x_{t_0}$ et $v = s \circ u \circ s^{-1} \circ u^{-1}$. Montrer que $v \in G$ et que $v(u(x_{t_0})) = -u(x_{t_0})$. En déduire que v est un retournement inclus dans G puis que $G = SO(E)$ (autrement dit,* **si $\dim E = 3$, alors $SO(E)$ est simple***).*

Exercice 18 *On suppose $n \geq 5$. Soit G un sous groupe distingué de $SO(E)$ et $u \in G \setminus \{\pm Id\}$. Montrer qu'il existe un plan P de E tel que $u(P) \neq P$. On pose $F = P + u(P)$. Montrer que $F^{\perp} \neq \{0\}$ et que si s est le retournement par rapport à P alors $v = s \circ u \circ s^{-1} \circ u^{-1} \in G \setminus \{Id\}$ et $v_{|F^{\perp}} = Id_{|F^{\perp}}$. Soit donc $x \in F^{\perp} \setminus \{0\}$ et $y \in F$ tel que $v(y) \neq y$. On note t_x, t_y les réflexions par rapport à $x^{\perp}$ et $y^{\perp}$ et $\sigma = t_x \circ t_y$. Montrer que $\sigma' = v \circ \sigma \circ v^{-1} \circ \sigma^{-1} \in G$, que $\sigma' = t_x \circ t_{v(y)}$ et donc que σ' est un retournement contenu dans G. En déduire que G contient $SO(E)$. En déduire que* **Si $\dim E \neq 4$, alors $SO(E)/ZSO(E)$ est simple**.

3 Décompositions et applications

Exercice 19 *Soit $E_i \subset E_{i+1}$ des sous-espaces de E tels que $\dim E_i = i$ pour tout $i \in \{1, \cdots, n\}$. Montrer que $T = \{u \in Gl(E)/u(E_i) \subset E_i$ et $u_{|E_i} \in Gl^+(E_i)$, pour tout $i\}$ est un sous-groupe de $Gl(E)$. Montrer que pour tout $u \in Gl(E)$ il existe un unique couple $(o, t) \in O(E) \times T$ tel que $u = o \circ t$.*

Montrer que

$$\begin{array}{rcl} O(E) \times T & \to & Gl(E) \\ (o, t) & \mapsto & o \circ t \end{array}$$

est un homéomorphisme. En déduire que $Gl(E)$ est homéomorphe à $O(E) \times \mathbb{R}^{\frac{n(n+1)}{2}}$. Montrer que la décomposition existe toujours (mais n'est pas unique) si $u \in L(E)$.

Montrer que si $K = \mathbb{C}$ et E est hermitien alors le même résultat est valable avec $O(E)$ remplacé par $U(E)$.

Exercice 20 *Montrer que pour toute matrice A symétrique positive il existe T triangulaire supérieure telle que $A = {}^t TT$. En déduire que $\det A \leq a_{11} \times \cdots \times a_{nn}$. En déduire que pour toute matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ on a $|\det M| \leq \inf\left(\prod_{i=1}^n \|c_i\|, \prod_{i=1}^n \|l_i\|\right)$, où c_i (resp. l_i) est la i-ème colonne (resp. ligne) de M.*

Exercice 21 *Soit $u \in Gl(E)$. Montrer que si $K = \mathbb{R}$ alors il existe un unique couple $(o, s) \in O(E) \times Sym^{++}(E)$ tel que $u = o \circ s$ (où $S^{++}(E)$ est l'ensemble des endomorphismes autoadjoints définis positifs). Montrer que l'application*

$$\begin{array}{rcl} O(E) \times Sym^{++}(E) & \to & Gl(E) \\ (o, s) & \mapsto & o \circ s \end{array}$$

est un homéomorphisme.

Si $K = \mathbb{C}$ et E est hermitien, montrer que le même résultat est valable avec $O(E)$ remplacé par $U(E)$ et $S^{++}(E)$ =endomorphismes hermitiens définis positifs.

Exercice 22 *Soit E un espace Euclidien. On munit $L(E)$ de la norme associée au produit scalaire de E et on note B la boule unité fermée pour cette norme. Montrer que B est l'enveloppe convexe de $O(E)$ (on pourra utiliser le théorème de Hahn-Banach et le fait que les formes linéaires sur $L(E)$ sont toutes de la forme $L_v(u) = \mathrm{tr}(u \circ v)$). Montrer $O(E)$ est l'ensemble des points extrémaux de B.*

Exercice 23 *Soit G un sous-groupe de $Sl(E)$ qui contient $SO(E)$ strictement, on va montrer qu'alors $G = Sl(E)$.*

Dans le cas $n = 2$, montrer qu'il existe $\lambda > 1$ tel pour toute base orthonormée $\mathcal{B}$ de E et tout $k \in \mathbb{N}$, G contient un élément u_k dont la matrice dans la base $\mathcal{B}$ est $\begin{pmatrix} \lambda^k & 0 \\ 0 & 1/\lambda^k \end{pmatrix}$. Montrer que pour tout $\mu \in [\frac{1}{\lambda^k}, \lambda^k]$, il existe $r \in SO(E)$ tel que μ soit valeur propre de $r \circ u_k$. En déduire que $G = SO(E)$.

Dans le cas $n \geq 3$ on procède par récurrence sur n. Montrer qu'il existe $(\lambda_1, \cdots, \lambda_n)$ tels que $\lambda_1 \times \cdots \times \lambda_n = 1$, $\lambda_1 \neq \lambda_2$ et pour toute base orthonormée $\mathcal{B} = (e_1, \cdots, e_n)$ de E, G contient un élément u dont la matrice dans la base $\mathcal{B}$ est $\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}$. On note $E' = \mathrm{Vect}\,(e_1, \cdots, e_{n-1})$ et $G' = \{g \in G/g(e_n) = e_n,\ g(E') \subset E'\}$. Montrer que $g \mapsto g_{|E'}$ injecte G' dans un sous groupe de $Sl(E')$ contenant strictement $O(E')$ (considérer $u \circ w \circ u^{-1} \circ w^{-1}$ avec $w \in O(E)$ vérifiant $w(e_n) = e_n$, $w(e_1) = e_2$ et $w(e_2) = e_1$). Par hypothèse de récurrence, on a G' isomorphe à $Sl(E')$. En déduire que G contient toutes les transvections $Id + \alpha \otimes v$ avec $\alpha(e_n) = 0$. Comme $\mathcal{B}$ est quelconque, en déduire que G contient toutes les transvections, et donc $G = Sl(E)$.