Agrégation externe de Mathématiques

TD: Réduction simultanée

E. AUBRY

<u>Références</u>:

J.-M. Arnaudiès, J. Bertin “Groupes, algèbres et géométrie”,

J. Fresnel “Algèbre des matrices”, X. Gourdon “Les Maths en tête, Algèbre”,

E. Leichtnam “Exercices de mathématiques, Algèbre et géométrie”,

H. Roudier “Algèbre linéaire”.

Dans la suite, E est un K-ev de dimension finie.

Exercice 1 Soit $(u_i)_{i\in I}$ un ensemble d'endomorphismes diagonalisables de E. Montrer que les propriétés suivantes sont équivalentes:
1) il existe une base $\mathcal{B}$ de E telle $Mat_{\mathcal{B}} u_i$ soit diagonale pour tout $i \in I$,
2) $u_i \circ u_j = u_j \circ u_i$, pour tout $(i,j) \in I^2$.
On pourra faire une récurrence sur la dimension de E.

Exercice 2 Soit k un corps de caratéristique $\neq 2$ et $G_n(k)$ l'ensemble des matrices diagonales de $\mathcal{M}_n(k)$ dont tous les éléments diagonaux valent ± 1. Montrer que G_n est un groupe de cardinal 2^n.

Soit G un sous-groupe de $Gl_n(k)$ tel que $g^2 = I_n$ pour tout $g \in G$. Montrer que G est conjugué à un sous-groupe de $G_n(k)$ (on pourra commencer par montrer que G est abélien). En déduire qu'il existe un morphisme injectif de $Gl_n(k)$ dans $Gl_m(k)$ si et seulement si $n \leqslant m$, et que $Gl_n(k)$ est isomorphe à $Gl_m(k)$ si et seulement si $n = m$.

Exercice 3 Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ diagonalisable. On note $C_u = \{v \in \mathcal{L}(E)/v \circ u = u \circ v\}$. Montrer que $v \in C_u$ ssi tout sous-espace propre de u est stable par v. Soit $B_u = \{w \in \mathcal{L}(E)/\forall v \in C_u,\, w\circ v = v\circ w\}$. Montrer que $B_u = K[u]$.

Exercice 4 Soit $(u_i)_{i\in I}$ un ensemble d'endomorphismes trigonalisables de E tel que $u_i \circ u_j = u_j \circ u_i$ pour tout $(i,j) \in I^2$. Montrer qu'il existe une base $\mathcal{B}$ de E tel que pour tout $i \in I$, $Mat_{\mathcal{B}} u_i$ soit triangulaire supérieure.