Agrégation externe de Mathématiques

TD: Réduction, Endomorphismes nilpotents et compléments

E. AUBRY

Références:

J.-M. Arnaudiès, J. Bertin “Groupes, algèbres et géométrie”,

J. Fresnel “Algèbre des matrices”, X. Gourdon “Les Maths en tête, Algèbre”,

E. Leichtnam “Exercices de mathématiques, Algèbre et géométrie”,

H. Roudier “Algèbre linéaire”.

Exercice 1 *Combien de solutions l'équation* $M^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 0 \\ 3 & 0 & 9 \end{pmatrix}$ *a-t-elle dans* $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$*?*

Exercice 2 *Soit* $u \in \mathcal{L}(E)$ *dont le polynôme caractéristique* $\chi_u = \prod_{i=1}^{n}(X - \lambda_i)$ *est scindé (avec éventuellement* $\lambda_i = \lambda_j$*). Montrer que pour tout* $P \in K[X]$ *on a les relations suivantes*

$$\chi_{P(u)} = \prod_{i=1}^{d}\big(X - P(\lambda_i)\big) \qquad \operatorname{tr}\big(P(u)\big) = \sum_{i=1}^{n} P(\lambda_i) \qquad \det P(u) = \prod_{i=1}^{n} P(\lambda_i).$$

En déduire le déterminant et le polynôme caractéristique d'un matrice circulante

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ a_n & a_1 & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & a_2 \\ a_2 & & a_n & a_1 \end{pmatrix}$$

Exercice 3 *Soit* $A_1, \cdots, A_n$ *des matrices nilpotentes de* $\mathcal{M}_n(K)$ *commutant deux à deux. Montrer que* $A_1 \times \cdots \times A_n = 0$*. Est-ce encore vrai si les matrices ne commutent pas?*

Exercice 4 *Soit* A *une matrice inversible de* $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ *et* $p \in \mathbb{Z}^*$*. Montrer qu'il existe une matrice* $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ *telle que* $B^p = A$*. Montrer qu'il existe* $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ *telle que* $A = e^B$*. A-t-on la même propriété si* A *n'est pas inversible? dans* $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$*?*

Exercice 5 *Soit* M *une matrice symétrique réelle de taille. Montrer que l'application*

$$\begin{array}{rcl} F : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} & \to & \mathbb{R} \\ X & \mapsto & \frac{\sum_{i,j=1}^{n} M_{ij} X_i X_j}{\sum_{i=1}^{n} X_i^2} \end{array}$$

atteint son maximum en un point v *de* $\mathbb{S}^{n-1}$*. Calculer* $d_v F$ *et en déduire que* M *admet au moins un vecteur propre. Montrer que* M *est diagonalisable dans une base orthonormée.*

Exercice 6 *Soit* $\big(E, \langle\cdot,\cdot\rangle\big)$ *un espace euclidien et* $u \in O(E)$*. Montrer que* E *se décompose en somme directe orthogonale des sous-apespaces propres* $E_1(u)$ *et* $E_{-1}(u)$ *et de plans stables par* u *(on pourra considérer* $u + u^{-1}$*). En déduire qu'il existe une BON de* E *dans laquelle la matrice de* u *est de la forme:*

$$\begin{pmatrix} I_p & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & -I_q & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & R(\theta_1) & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & R(\theta_k) \end{pmatrix}$$

où $R(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$*. En déduire que* $SO(E)$ **est compact et connexe par arcs** *et que* $O(E)$ **est compact et admet deux composantes connexes homéomorphes**.