Agrégation externe de Mathématiques

TD: Sous-espaces stables, Polynômes annulateurs

E. AUBRY

Références:

J.-M. Arnaudiès, J. Bertin “Groupes, algèbres et géométrie”,

J. Fresnel “Algèbre des matrices”, X. Gourdon “Les Maths en tête, Algèbre”,

E. Leichtnam “Exercices de mathématiques, Algèbre et géométrie”,

H. Roudier “Algèbre linéaire”.

Dans la suite, E est un K-espace vectoriel non nul de dimension finie, m_u désigne le polynôme minimal de $u \in \mathcal{L}(E)$ et χ_u son polynôme caractéristique.

Exercice 1 Soit $u \in \mathcal{L}(E)$, F un sous-espace stable par u et $v = u_{|F}$. Montrer que m_v/m_u et χ_v/χ_u. Soit F_1 et F_2 deux sous-espaces stables par u et $u_i = u_{|F_i}$. Montrer que si $E = F_1 + F_2$ alors $m_u = ppcm(m_{u_1}, m_{u_2})$. Montrer que si $E = F_1 \oplus F_2$ alors $\chi_u = \chi_{u_1} \times \chi_{u_2}$.

Exercice 2 Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ et $m_u = \prod_{i=1}^r Q_i^{\alpha_i}$ la décomposition en facteurs irréductibles de m_u dans $k[X]$. Montrer qu'on a

$$E = \oplus_{i=1}^r \ker Q_i^{\alpha_i}(u)$$

et que pour tout $j \geqslant \alpha_i$, on a

$$\{0\} \subsetneq \ker Q_i(u) \subsetneq \ker Q_i^2(u) \subsetneq \cdots \subsetneq \ker Q_i^{\alpha_i}(u) = \ker Q_i(u)^j,$$

que tous ces espaces sont stables par u et que le polynôme minimal de $u_{|\ker Q_i^\beta(u)}$ est Q_i^β pour tout $\beta \leqslant \alpha_i$.

Exercice 3 Montrer que si $K = \mathbb{R}$ alors u admet au moins une droite ou un plan stable dans E.

Montrer que si u est un endomorphisme symétrique réel (ou Hermitien complexe) alors il est diagonalisable dans une base orthonormée.

Montrer que si u est un endomorphisme normal d'un espace euclidien E, alors E se décompose en somme directe orthogonale de droites et de plans stables par u.

Exercice 4 Soit $M \in \mathcal{M}_n(K)$ et $L \supset K$ un sur-corps de K. Montrer que le polynôme caractéristique de M est le même dans $L[X]$ et dans $K[X]$. Montrer que le polynôme minimal de M est le même dans $L[X]$ et dans $K[X]$ (on pourra considérer une base du K-ev L et décomposer les coefficients de m_M^L dans cette base).

Exercice 5

1. Montrer que tout facteur irréductible de m_u est un facteur irréductible de χ_u.
2. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ et P un polynôme annulateur de u. Montrer que toute valeur propre de u est une racine de P. En déduire que si χ_u est scindé dans $k[X]$, alors $m_u/\chi_u/m_u^n$.

3. Soit $M \in \mathcal{M}_n(k)$ la matrice de u dans une base de E. En se plaçant dans $\mathcal{M}_n(L)$, où L est un corps de décomposition de χ_M, montrer qu'on a toujours $m_u/\chi_u/m_u^n$, quelque soit $u \in \mathcal{L}(E)$. En déduire que χ_u et m_u on exactement les mêmes facteurs irréductibles dans $k[X]$: Si $\chi_u = \prod_{i=1}^d Q_i^{\beta_i}$ est la décomposition de χ_u en facteurs irréductibles alors il existe $(\alpha_i)_{1\leq i\leq d}$ tels que $1 \leq \alpha_i \leq \beta_i$ et $m_u = \prod_{i=1}^d Q_i^{\alpha_i}$.

4. On note $E_i = \operatorname{Ker} Q_i^{\beta_i}(u)$ (appelés espaces caractéristiques de u). Montrer que $E = \oplus_{i=1}^d E_i$, que E_i est stable par u, que $E_i = \operatorname{Ker} Q^{\alpha_i}(u)$, et que si on note $u_i = u_{|E_i}$ alors $\chi_{u_i} = Q_i^{\beta_i}(u)$ et $m_{u_i} = Q_i^{\alpha_i}(u)$. Enfin, montrer que $\dim E_i = \beta_i \times \deg Q_i$.

5. Soit F un sous espace de E stable par u. Montrer que $F = \oplus_{i=1}^d F \cap E_i$. On note $\bar{u} = u_{|F}$ et $I_F = \{i \in \{1, \cdots, d\}/F \cap E_i \neq \{0\}\}$. Montrer que $\chi_{\bar{u}} = \prod_{i\in I_F} Q_i^{\beta'_i}$ et $m_{\bar{u}} = \prod_{i\in I_F} Q_i^{\alpha'_i}$, où $1 \leq \alpha'_i \leq \alpha_i$ et $1 \leq \beta'_i \leq \beta_i$ pour tout $i \in I_F$.

6. Montrer que si u est diagonalisable alors les sous-espace stables par u sont les sommes directes de sous-espaces des espaces propres de u.

   Application: dresser la liste des sous-espaces de $\mathbb{R}^3$ stables par l'endomorphisme associé à la matrice
$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 6 *Soit $M \in Gl_n(\mathbb{C})$ et $N \in \mathbb{N}^*$. Montrer que si M^N est diagonalisable alors M est diagonalisable. Que peut-on dire si M n'est pas inversible? Si $M \in Gl_n(\mathbb{R})$?*

Exercice 7 *Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Pour tout $x \in E$, on pose $E_x = \{P(u)(x)/P \in K[X]\}$ et P_x l'unique polynôme unitaire de $K[X]$ tel que $P(u)(x) = 0$ si et seulement si P_x/P.*

1. *Montrer que E_x est le plus petit sous-espace de E stable par u et contenant x. Montrer que P_x/m_u et que E_x est un espace de dimension $d_x = \deg(P_x)$. Calculer la matrice de $u_{|E_x}$ dans la base $(x, u(x), \cdots, u^{d_x-1}(x))$. Montrer (sans utiliser Cayley-Hamilton) que P_x/χ_u. En déduire le théorème de Cayley-Hamilton.*

2. *Montrer que si $E_x \cap E_y = \{0\}$ alors $P_{x+y} = ppcm(P_x, P_y)$. Montrer que si P_x et P_y sont premiers entres eux alors $E_{x+y} = E_x \oplus E_y$.*

3. *Soit $P \in K[X]$ tel que P/m_u. Montrer qu'il existe $x \in E$ tel que $P_x = P$ (on pourra commencer par le cas où P est une puissance d'un polynôme irréductible).*

Exercice 8 *Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Montrer que 0 est dans l'adhérence de la classe de conjugaison $\{PMP^{-1}/P \in Gl_n(\mathbb{C})\}$ de M ssi M est nilpotente.*

Montrer que la classe de conjugaison de M est fermé ssi M est diagonalisable.

Exercice 9 *Soit E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension n et $(e_1, \cdots, e_n)$ une base de E. A tout $\sigma \in \mathcal{S}_n$, on associe un automorphisme de E en posant $u(e_i) = e_{\sigma(i)}$. Montrer que u_σ est diagonalisable. Déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres de u_σ (on pourra commencer par le cas où σ est une permutation circulaire, puis considérer une décomposition de σ en cycles à support disjoints).*