Algèbre bilinéaire

I. Formes bilinéaires symétriques – formes quadratiques

Exercice 1. — **Vrai ou faux ?**

a) Une forme bilinéaire non dégénérée n'a pas de vecteurs isotropes.

b) Une forme bilinéaire *anisotrope* est non dégénérée.

c) Sur $\mathbf{R}$, une forme est anisotrope ssi elle est définie positive ou négative.

d) Sur $\mathbf{Q}$, une forme est anisotrope ssi elle est définie positive ou négative.

e) Une forme quadratique q est définie positive si $q(e_i) > 0$ sur tous les vecteurs d'une base (e_i).

Exercice 2. — Déterminer le rang et la signature des formes quadratiques suivantes :

a) $Q(x, y, z) = 2x^2 - 2y^2 - 6z^2 + 3xy - 4xz + 7yz$.

b) $Q(x_1, x_2, x_3) = |x_1|^2 + |x_2|^2 + |x_3|^2 - i\overline{x_1}x_2 + ix_1\overline{x_2} + i\overline{x_1}x_3 - ix_1\overline{x_3} + \overline{x_2}x_3 + x_2\overline{x_3}$.

Exercice 3. — Soit n un entier et E l'espace $\mathbf{R}[X]_{\leqslant n}$. Quelle est la signature de la forme quadratique $\Phi : P \mapsto \int_0^1 P^2 - (\int_0^1 P)^2$.

Exercice 4. — Montrer que l'ensemble des matrices $n \times n$ réelles symétriques (resp. hermitiennes) définies positives est convexe.

Exercice 5. — Quelles sont les signatures des matrices symétriques $\begin{bmatrix} 0 & & 1 \\ & \iddots & \\ 1 & & 0 \end{bmatrix}$ et $\begin{bmatrix} 0 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \dots & 1 & 0 \end{bmatrix}$?

Exercice 6. — Soit φ une forme bilinéaire symétrique sur E de dimension finie. On suppose φ non dégénérée et on note $\Phi : E \to E^*$ l'isomorphisme associé.
Pout $F \subset E$, on a deux notions d'orthogonalité : $F^{\perp_\varphi} \subset E$ (l'orthogonal relatif à φ) et $F^{\perp_*} \subset E^*$ (l'orthogonal pour la dualité). Montrer que Φ induit un isomorphisme de $F^{\perp_\varphi}$ sur $F^{\perp_*}$.

Exercice 7. — L'ensemble des formes quadratiques (resp. quadratiques hermitiennes) sur $\mathbf{R}^n$ (resp. $\mathbf{C}^n$) de rang et de signature fixés est-il un ouvert ? un fermé ?

Exercice 8. — Soit k un corps de caractéristique 2. Montrer que les matrices symétriques $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ et $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ ne sont pas congruentes. Sont-elles congruentes à une matrice diagonale ?

Exercice 9. — Soient a et b des scalaires non nuls avec $a+b \neq 0$. Montrer que la matrice symétrique $\begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix}$ est congruente à $\begin{bmatrix} a+b & 0 \\ 0 & \frac{ab}{a+b} \end{bmatrix}$.

Exercice 10. — Soit $\mathbf{F}_q$ un corps fini de caractéristique $\neq 2$.

a) Combien y a-t-il de carrés dans $\mathbf{F}_q$? Quel est le groupe $\mathbf{F}_q^*/(\mathbf{F}_q^*)^2$.

b) Soient $u, v \in \mathbf{F}_q^*$. Montrer qu'il existe $a, b \in \mathbf{F}_q$ tels que $ua^2 + vb^2 = 1$.
[**Indication:** Considérer les ensembles $\{ua^2, a \in \mathbf{F}_q\}$ et $\{1 - vb^2, b \in \mathbf{F}_q\}$.]

c) Soit $u \in \mathbf{F}_q$ un non carré. Montrer qu'une matrice symétrique non-dégénérée $S \in \mathcal{S}_n(\mathbf{F}_q)$ est congruente soit à id_n soit à $\begin{bmatrix} \mathrm{id}_{n-1} & 0 \\ 0 & u \end{bmatrix}$ (et que ces cas sont disjoints).

d) En déduire que deux matrices symétriques non dégénérées sur $\mathbf{F}_q$ sont congruentes ssi elles ont même discriminant.

Exercice 11. — Soit $H \in M_n(\mathbf{C})$ une matrice hermitienne (définie) positive. Pour tout $1 \leqslant k \leqslant n$, on note H_k la matrice « tronquée » constituée des k premières lignes et k premières colonnes.
Montrer que pour tout $1 \leqslant k \leqslant n$, la matrice H_k est encore hermitienne (définie) positive et que $\det H_k \geqslant 0$ (> 0 dans le cas défini.).
Montrer que la réciproque est vraie dans le cas défini positif mais pas en général.
Plus généralement, si pour tout k $\det H_k \neq 0$, montrer que la signature de H se lit dans la suite des signes des $\det H_k$.

Exercice 12. — Montrer que toute matrice $M \in \mathrm{M}_n(\mathbf{C})$ est semblable à une matrice symétrique.
[**Indication:** Cela revient à trouver une matrice inversible P telle que $(P\,{}^tP)M(P\,{}^tP)^{-1} = {}^tM$ et utiliser Jordan.]

Exercice 13. — Montrer que l'exponentielle $\mathrm{M}_n(\mathbf{R}) \to \mathbf{GL}_n(\mathbf{R})$ envoie les matrices symétriques homéomorphiquement sur les matrices symétriques définies positives.

Exercice 14. — Soit $P \in \mathbf{R}[X]$ un polynôme unitaire de degré n ayant toutes ses racines réelles. Le but de cet exercice est de construire une matrice symétrique réelle S telle que $\chi_S = (-1)^n P$.

a) On cherche S sous la forme d'une matrice tridiagonale symétrique, c'est-à-dire de la forme
$$S_n(a_i, b_i) := \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & & 0 \\ b_1 & a_2 & b_2 & \\ & \ddots & \ddots & \ddots \\ 0 & & b_{n-1} & a_n \end{bmatrix}$$ pour certains réels a_i, b_i.
Pour S_n tridiagonale symétrique, exprimer χ_{S_n} en fonction de $\chi_{S_{n-1}}$ et $\chi_{S_{n-2}}$.

b) On suppose dans cette question que P est à racines simples réelles.
Montrer qu'il existe $c, d \in \mathbf{R}$ et $R \in \mathbf{R}[X]$ unitaire de degré $n-2$ tels que l'on ait $P = (X-d)\frac{P'}{n} - c^2 R$.
[**Indication:** Considérer la division euclidienne de P par P'. Remarquer que les racines de P' entrelacent celles de P. En évaluant en toutes les racines de P', on constate que R a des racines entre celles de P'. Enfin remarquer que le signe de R en $+\infty$ est celui de R en la plus grande racine de P'.]
En déduire un algorithme (utilisant juste des opérations algébriques et l'extraction de racines carrées) pour construire une matrice tridiagonale symétrique dont le polynôme caractéristique est P.

c) Généraliser au cas où P a des racines multiples.

Exercice 15. — Soit $P \in \mathbf{R}[X]$ un polynôme unitaire de degré n et soit $\mathcal{A}$ la k-algèbre $k[X]/(P)$. Pour tout élément $\alpha \in \mathcal{A}$, on pose $\mathrm{tr}_{\mathcal{A}}(\alpha) := \mathrm{tr}(m_\alpha)$, où $m_\alpha : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ est l'endomorphisme de multiplication par α.

a) Montrer que $\varphi_P : \mathcal{A} \times \mathcal{A} \to k$, $(\alpha, \beta) \mapsto \mathrm{tr}_{\mathcal{A}}(\alpha\beta)$ est une forme bilinéaire symétrique.

b) Déterminer la signature de φ_P lorsque P est un polynôme irréductible.

c) En déduire la signature lorsque P est une puissance d'un polynôme irréductible.
[**Indication:** Dans $k[X]/(Q^i)$ les éléments du type $Q\alpha$ sont nilpotents donc leur trace est...]

d) En déduire que la signature de φ_P est $(r_1 + r_2, r_2)$, où r_1 est le nombre de racines distinctes réelles de P et r_2 est le nombre de paires distinctes de racines complexes conjuguées de P.

II. Espaces euclidiens – espaces de Hilbert

Exercice 16. — Donner des exemples de matrices symétriques complexes non diagonalisables.

Exercice 17. — Soient $a_1, \ldots, a_n$ des réels. Montrer que la matrice $\begin{bmatrix} 0 & & a_1 \\ & 0 & \vdots \\ a_1 & \ldots & a_n \end{bmatrix}$ est diagonalisable et donner en donner une matrice diagonale qui lui est semblable.

Exercice 18. — Montrer que $M, N \mapsto \mathrm{tr}({}^tMN)$ est un produit scalaire sur $\mathrm{M}_n(\mathbf{R})$ et que la norme associée est une norme d'algèbre qui n'est pas subordonnée à une norme de $\mathbf{R}^n$ (*ie* une norme triple).

Exercice 19. — Pour $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbf{C}^3$, on définit :

$$q(x) = |x_1|^2 + 3|x_2|^2 + 6|x_3|^2 + i\overline{x_1}x_2 - ix_1\overline{x_2} + 2ix_2\overline{x_3} - 2i\overline{x_2}x_3.$$

a) Ecrire la matrice de f dans la base canonique.

b) Montrer que f est un produit scalaire hermitien.

c) Construire une base orthogonale de $\mathbf{C}^3$ pour ce produit scalaire hermitien.

Exercice 20. — Soit $A = \begin{bmatrix} 4 & i & -i \\ -i & 4 & 1 \\ i & 1 & 4 \end{bmatrix}$. Trouver une matrice unitaire U et une matrice diagonale D telle que $D = U^{-1}AU$.

Exercice 21. — Soit $(E, \|\cdot\|)$ un $\mathbf{R}$ espace vectoriel normé. On va montrer que la norme $\|\cdot\|$ est associée à un produit scalaire ssi elle vérifie l'identité du parallélogramme :

$$\forall (x, y) \in E^2,\ \|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2).$$

a) Montrer que la condition est effectivement nécessaire.

b) Réciproquement, on suppose l'identité du parallélogramme vérifiée. Soit $\varphi : E^2 \to \mathbf{R}$ l'application définie par : $\varphi(x, y) = \frac{1}{4}\left(\|x + y\|^2 - \|x - y\|^2\right)$.
Montrer que φ est bilinéaire et conclure.

c) Donner des exemples de normes sur $\mathbf{R}^n$ qui ne sont pas euclidiennes.

Exercice 22. — Soient $S_1, S_2 \in \mathcal{S}_n(\mathbf{R})$ deux matrices symétriques réelles. On suppose S_1 définie positive.

a) Montrer que S_1 est inversible, que son inverse S_1^{-1} est encore symétrique et définie positive.

b) Montrer que l'endomorphisme S_1S_2 est autoadjoint pour le produit scalaire associé à S_1^{-1}.

c) En déduire que S_1S_2 est diagonalisable.

Exercice 23. — **Minimax**

Soient $(E, \langle\cdot\rangle)$ un espace euclidien de dimension n et $u \in \mathcal{L}(E)$ auto-adjoint. On note $\lambda_1 \leqslant \ldots \lambda_n$ les valeurs propres de u et $\{e_1, \ldots, e_n\}$ une base orthonormée de vecteurs propres. Enfin, pour tout $x \in E$, on pose $q(x) := \langle x, u(x)\rangle$.

a) Montrer que l'on a $\min\limits_{\|x\|=1} q(x) = \lambda_1$ et $\max\limits_{\|x\|=1} q(x) = \lambda_n$.

b) Pour tout $1 \leqslant p \leqslant n$, on pose $F_p := \mathrm{Vect}\{e_1, \ldots, e_p\}$ et $G_p = \mathrm{Vect}\{e_p, \ldots, e_n\}$. Montrer que pour tout p l'on a :

$$\lambda_p = \min_{\substack{x \in G_p \\ \|x\| = 1}} q(x) = \max_{\substack{x \in F_p \\ \|x\| = 1}} q(x).$$

c) Pour tout $1 \leqslant p \leqslant n$, on note $\mathcal{F}_p$ (resp. $\mathcal{G}_p$) l'ensemble des sev de E de dimension p (resp. de dimension $n - p + 1$). Montrer que pour tout p l'on a :

$$\lambda_p = \max_{G \in \mathcal{G}_p} \min_{\substack{x \in G \\ \|x\| = 1}} q(x) = \min_{F \in \mathcal{F}_p} \max_{\substack{x \in F \\ \|x\| = 1}} q(x).$$

[**Indication:** Si $G \in \mathcal{G}_p$, montrer que $G \cap F_p \neq 0$.]

d) **Application :** soit $M \in \mathcal{S}_n$ une matrice symétrique réelle et $\lambda_1 \leqslant \ldots, \leqslant \lambda_n$ ses valeurs propres. Soit également $N \in \mathcal{S}_{n-1}$ le bloc obtenu en enlevant la dernière ligne et la dernière colonne de M. On note $\mu_1 \leqslant \cdots \leqslant \mu_n$ les valeurs propres de N. Montrer que l'on a l'entrelacement :

$$\lambda_1 \leqslant \mu_1 \leqslant \lambda_2 \leqslant \cdots \leqslant \mu_{n-1} \leqslant \lambda_n.$$

Exercice 24. — **Inégalité de Weyl**
Soient A et $B \in \mathcal{S}_n(\mathbf{R})$ deux matrices symétriques réelles ; on pose $C := A + B$. Les matrices A, B et C ont toutes leurs valeurs propres réelles. On note $\alpha_1 \geqslant \cdots \geqslant \alpha_n$ les valeurs propres (réelles) de A, $\beta_1 \geqslant \cdots \geqslant \beta_n$ celles de B, et $\gamma_1 \geqslant \cdots \geqslant \gamma_n$ celles de C.
Soient enfin $(f_k)_{1 \leqslant k \leqslant n}$ (resp. (g_k) et (h_k)) une base orthonormée de vecteurs propres de A (resp. B et C) pour les valeurs propres α_k (resp. β_k et γ_k).

a) **Question préliminaire** : Soit E un espace vectoriel de dimension n et F, G, H des sous-espaces tels que $\dim F + \dim G + \dim H \geqslant 2n + 1$. Montrer que $F \cap G \cap H \neq \{0\}$.
[**Indication:** Utiliser la formule de Grassmann.]

b) Montrer que pour tout $x \in \mathbf{R}^n$ tel que $\|x\| = 1$ on a $\alpha_n \leqslant \langle x, Ax \rangle \leqslant \alpha_1$.

Le but est de montrer l'inégalité de Weyl : pour tous i, j tels que $i + j - 1 \leqslant n$, on a

$$\gamma_{i+j-1} \leqslant \alpha_i + \beta_j.$$

On fixe donc un tel couple (i, j) et on pose :
$F := \mathrm{Vect}\{f_i, f_{i+1}, \ldots, f_n\}$, $G := \mathrm{Vect}\{g_j, g_{j+1}, \ldots, g_n\}$ et $H := \mathrm{Vect}\{h_1, \ldots, h_{i+j-1}\}$.

c) Justifier l'existence d'un vecteur $x \in F \cap G \cap H$ tel que $\|x\| = 1$.

d) Montrer que pour x comme ci-dessus, on a

$$\langle x, Ax \rangle \leqslant \alpha_i, \qquad \langle x, Bx \rangle \leqslant \beta_j, \qquad \text{et} \quad \langle x, Cx \rangle \geqslant \gamma_{i+j-1}.$$

e) Conclure.

Exercice 25. — Dans $\mathbf{C}^3$ muni de sa structure hermitienne standard, on note F le plan d'équation $x_1 - x_2 + ix_3 = 0$. Expliciter la matrice de la projection orthogonale sur F dans la base canonique.

Exercice 26. — Soit E un espace euclidien. Montrer qu'un projecteur (resp. une symétrie) de $\mathcal{L}(E)$ est auto-adjoint ssi c'est un projecteur (resp. une symétrie) orthogonal(e).

Exercice 27. — Soit E un espace euclidien et $p \in \mathcal{L}(E)$ un projecteur. Montrer que p est un projecteur orthogonal ssi $\forall x \in E,\ \|p(x)\| \leqslant \|x\|$.

Exercice 28. — Soit E un espace hermitien et $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que pour tout $x \in E$ l'on ait $\langle f(x) | x \rangle = 0$. Montrer que f est nul. Que penser de l'énoncé analogue sur un espace euclidien ?

Exercice 29. — Soient E un espace vectoriel euclidien et u un endomorphisme de E. On suppose que pour tout vecteur x de E, on a $\|u(x)\| \leqslant \|x\|$.

a) Montrer que $\forall x \in E, \|u^*(x)\| \leqslant \|x\|$.

b) Montrer que $\forall x \in E, (u(x) = x) \iff (u^*(x) = x)$.

c) Montrer que $\mathrm{Ker}(u - \mathrm{id}_E)$ et $\mathrm{Im}(u - \mathrm{id}_E)$ sont supplémentaires orthogonaux dans E.

d) Pour tout entier naturel non nul n, on pose $v_n = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} u^k$. Montrer que la suite (v_n) converge vers le projecteur orthogonal sur $\mathrm{Ker}(u - \mathrm{id}_E)$.

Exercice 30. — Soit E un espace euclidien.

a) Soient x, y deux vecteurs *non nuls* de E. Montrer qu'il existe un unique réel $\theta \in [0, \pi]$ tel que l'on ait $\langle x, y \rangle = \|x\| \|y\| \cos(\theta)$. Ce réel θ s'appelle l'*écart angulaire* entre x et y.

b) Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme de E. Montrer que les propriétés suivantes sont équivalentes :

(i) Il existe $\alpha > 0$ tel que $f^* \circ f = \lambda \mathrm{id}$.

(ii) Il existe $\lambda > 0$ tel que $\forall x \in E,\ \|f(x)\| = \lambda \|x\|$.

(iii) f est la composée d'une homothétie de rapport $\lambda > 0$ et d'une isométrie.

(iii*) f est la composée d'une homothétie non nulle et d'une isométrie.

(iv) f préserve l'écart angulaire entre deux vecteurs non nuls.

(v) f est non nul et préserve l'orthogonalité.

Un tel endomorphisme f est une *similitude* (vectorielle) et λ est son *rapport*.

Exercice 31. — Soit E un espace euclidien ou hermitien. On dit qu'un endomorphisme $u \in \mathcal{L}(E)$ est normal si u et u^* commutent.

a) Cas hermitien : Soit λ une valeur propre de u. Montrer que l'espace propre E_λ est stable par u^*, puis que $E_\lambda^\perp$ est stable par u. En déduire que u est diagonalisable dans une base orthonormée.

b) Cas euclidien : Si u n'admet pas de valeur propre réelle, soit X un vecteur propre complexe associé à une valeur propre complexe commun à u et u^* (justifier). Montrer que le plan $P = \{\mathrm{Re}(X), \mathrm{Im}(X)\}$ est stable par u et u^*. Montrer que X et $\overline{X}$ sont orthogonaux. En déduire une base orthonormale de P où la matrice de u est de la forme $\begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}$. En déduire que u est diagonalisable par blocs dans une base orthonormée.

c) Enoncer des théorèmes de réduction pour $\mathbf{O}(n)$, $\mathbf{SO}(n)$, $\mathbf{U}(n)$, et pour les matrices antisymétriques.

d) Application 1 : Montrer que $\mathbf{SO}(n)$ et $\mathbf{U}(n)$ sont connnexes par arcs.

e) Application 2 : Montrer que l'application exponentielle envoie *surjectivement* l'espace des matrices antisymétriques réelles dans $\mathbf{SO}(n)$.

III. Groupe orthogonal

Exercice 32. — Déterminer les matrices de $\mathbf{O}_n(\mathbf{R})$ dont tous les coefficients sont positifs ou nuls. Déterminer les matrices de $\mathbf{O}_n(\mathbf{R})$ qui sont triangulaires supérieures.

Exercice 33. — Soit $A = (a_{ij})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ une matrice orthogonale réelle.

a) Montrer que $\sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} |a_{i,j}| \leqslant n\sqrt{n}$.

b) Montrer que $\left|\sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} a_{ij}\right| \leqslant n$.

c) Peut-on avoir égalité simultanément dans les deux inégalités précédentes ?

Exercice 34. — Montrer que les réflections (les symétries orthogonales par rapport à un hyperplan) engendrent le groupe orthogonal $\mathbf{O}(n)$.
Pour $n = 3$, montrer que les retournements (les rotations d'angle π) engendrent $\mathbf{SO}(3)$.

Exercice 35. — Quels sont les projecteurs et les symétries dans le groupe orthogonal ?

Exercice 36. — Trouver tous les sous-groupes distingués d'ordre 2 de $\mathbf{O}(n)$.
Pour quelles valeurs de n a-t-on $\mathbf{O}(n) \cong \mathbf{SO}(n) \times \mathbf{Z}/2$?

Exercice 37. — Soit E un espace euclidien et $u \in \mathbf{O}(E)$.
Montrer que u est diagonalisable ssi u est une symétrie orthogonale.

Exercice 38. — Montrer que le groupe orthogonal $\mathbf{O}(n)$ agit transitivement sur $S^{n-1} := \{x \in \mathbf{R}^n,\ \|x\| = 1\}$. Quel est le stabilisateur du point $(0; \dots; 0; 1)$?

Exercice 39. — Soit $A \in \mathrm{M}_n(\mathbf{R})$ une matrice antisymétrique réelle.

a) Montrer que les valeurs propres (complexes) de A sont imaginaires pures.

b) Montrer que $\mathrm{id}_n - A$ est inversible et que la matrice $\mathcal{C}(A) := (\mathrm{id}_n + A)(\mathrm{id}_n - A)^{-1}$ est dans $\mathbf{SO}(n)$.

c) Réciproquement, montrer que toute matrice de $\mathbf{SO}(n)$ dont -1 n'est pas valeur propre est de la forme $\mathcal{C}(A)$ avec A antisymétrique réelle.
[**Indication:** Commencer par $n = 2$ puis utiliser l'exercice ***31-c)*** .]

Exercice 40. — **Lien avec les quaternions**
On note $\mathbf{H} := \{a+bi+cj+dk,\ (a,b,c,d)\in\mathbf{R}^4\}$ l'algèbre des quaternions. On rappelle que pour $q=a+bi+cj+dk\in\mathbf{H}$, on pose $\overline{q} := a-bi-cj-dk$ et $N(q)=q\overline{q}=a^2+b^2+c^2+d^2\in\mathbf{R}$.

a) Montrer que N est multiplicative : $N(q_1q_2)=N(q_1)N(q_2)$.

b) Soit G l'ensemble des quaternions de norme 1. Montrer que $q\in G \iff \overline{q}=q^{-1}$.

c) Pour $q\in G$, on note $s_q : \mathbf{H}\to\mathbf{H}$, $h\mapsto qhq^{-1}$. Montrer que s_q préserve la norme N.
En déduire que la matrice de s_q dans la base $\{1,i,j,k\}$ est orthogonale.

d) Montrer que s_q stabilise $\mathrm{Vect}\{1\}$ et $P := \mathrm{Vect}\{i,j,k\}$ ("les quaternions purs").
[**Indication:** P est l'orthogonal de $\mathrm{Vect}\{1\}$.]
En déduire que $(s_q)_{|P}\in\mathbf{O}(N_{|P})$.

e) Montrer que P est connexe par arcs. En déduire que $(s_q)_{|P}\in\mathbf{SO}(N_{|P})$.

f) Si $q\in P\cap G$ montrer que $s_q\in\mathbf{SO}(N_{|P})$ est un retournement d'axe q.
En déduire que le morphisme $G\to\mathbf{SO}(N_{|P})\cong\mathbf{SO}(3)$ est surjectif. Quel est son noyau ?

g) Montrer que pour tout $M\in\mathbf{SO}(3)$ il existe $(a,b,c,d)\in\mathbf{R}^4$, unique au signe près, tel que :

$$M=\begin{bmatrix} a^2+b^2-c^2-d^2 & -2da+2cb & 2ca+2db \\ 2da+2cb & a^2-b^2+c^2-d^2 & -2ba+2dc \\ -2ca+2db & 2ba+2dc & a^2-b^2-c^2+d^2 \end{bmatrix}$$

Exercice 41. — **Lemme de Maschke**
Soit G un sous-groupe fini de $\mathbf{GL}_n(\mathbf{R})$ (resp. $\mathbf{GL}_n(\mathbf{C})$). Montrer que G est conjugué à un sous-groupe de $\mathrm{O}(n)$ (resp. $\mathrm{U}(n)$).

Exercice 42. — Soit $A\in M_n(\mathbf{C})$. On pose $U=\mathrm{Re}(A)$, $V=\mathrm{Im}(A)$ et $C=\begin{bmatrix} U & -V \\ V & U\end{bmatrix}\in M_{2n}(\mathbf{R})$.

a) Montrer que A est hermitienne définie positive ssi C est symétrique définie positive.

b) Montrer que A est unitaire ssi C est orthogonale.

Exercice 43. — Soit E un espace euclidien et $\{0\}=E_0\subset E_1\subset\cdots\subset E_n=E$ des sous-espaces de E tels que $\dim E_i=i$ pour tout i.

a) Montrer que $T=\{t\in\mathbf{GL}(E), \forall i\ t(E_i)\subset E_i \text{ et } t_{|E_i}\in\mathbf{GL}^+(E_i)\}$ est un sous-groupe de $\mathbf{GL}(E)$.

b) Montrer que pour tout $u\in\mathbf{GL}(E)$, il existe un unique couple $(o,t)\in\mathbf{O}(E)\times T$ tel que $u=o\circ t$.
Traduire le résultat matriciellement.

c) Montrer que

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{O}(E)\times T & \to & \mathbf{GL}(E) \\ (o,t) & \mapsto & o\circ t \end{array}$$

est un homéomorphisme. En déduire que $\mathbf{GL}(E)$ est homéomorphe à $\mathbf{O}(E)\times\mathbf{R}^{\frac{n(n+1)}{2}}$.

d) Si u n'est pas inversible, montrer que u s'écrit $o\circ t$ avec $o\in\mathbf{O}(E)$ et t telle que $t(E_i)\subset E_i$.

e) Enoncer et démontrer l'analogue hermitien.

f) Application 1 : Montrer que $\mathbf{O}(n)$ (resp. $\mathbf{U}(n)$) est un sous-groupe compact maximal de $\mathbf{GL}_n(\mathbf{R})$ (resp. $\mathbf{GL}_n(\mathbf{C})$).

g) Application 2 : inégalité d'Hadamard. On note $\|\cdot\|$ la norme euclidienne usuelle de $\mathbf{R}^n$ (resp. de $\mathbf{C}^n$). Pour $M\in\mathrm{M}_n(\mathbf{R})$, on note $C_1,\dots,C_n$ ses colonnes. Montrer que $|\det M|\leqslant\|C_1\|\dots\|C_n\|$.

Exercice 44. — **Décomposition polaire**

a) Soit $S \in \mathrm{M}_n(\mathbf{C})$ une matrice symétrique positive. Montrer qu'il existe une unique matrice symétrique positive R telle que $H = R^2$. On dit alors que R est la racine carrée de S.

b) Soit $A \in \mathbf{GL}_n(\mathbf{R})$. Montrer qu'il existe un unique couple de matrices (O, S) avec O orthogonale et S symétrique positive tel que l'on ait

$$A = OS.$$

[**Indication :** Montrer que si de tels O et S existent alors S est la racine carrée de A^*A.]

c) Montrer que l'application $\begin{array}{ccc} \mathbf{O}(n) \times \mathcal{S}_n(\mathbf{R}) & \to & \mathbf{GL}_n(\mathbf{R}) \\ (O, S) & \mapsto & OS \end{array}$ est un homéomorphisme.

d) Enoncer et démontrer les énoncés hermitiens analogues.

Exercice 45. — Soient $\Phi : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ une forme quadratique *non dégénérée*, $\varphi : \mathbf{R} \times \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ sa forme bilinéaire associée et $u \in \mathcal{L}(\mathbf{R}^n)$ un endomorphisme de $\mathbf{R}^n$.

a) Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes :

(i) pour tous $x, y \in \mathbf{R}^n$, $\varphi(u(x), u(y)) = \varphi(x, y)$.

(ii) pour tout $x \in \mathbf{R}^n$, $\Phi(u(x)) = \Phi(x)$.

On note $\mathbf{O}(\Phi)$ l'ensemble des endomorphismes qui vérifient ces conditions.

b) On note Q (resp. M) la matrice de Φ (resp. de u) dans la base canonique de $\mathbf{R}^n$. Montrer que l'on a $u \in \mathbf{O}(\Phi)$ ssi ${}^tMQM = Q$.
On note $\mathbf{O}(Q)$ l'ensemble des matrices M qui vérifient cette condition.

c) **i)** Montrer que $\mathbf{O}(Q)$ est un sous-groupe de $\mathbf{GL}_n(\mathbf{R})$.

ii) Montrer que pour deux formes quadratiques *non dégénérées* Φ_1 et $\Phi_2 : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ ayant même signature, les groupes $\mathbf{O}(Q_1)$ et $\mathbf{O}(Q_2)$ sont conjugués dans $\mathbf{GL}_n(\mathbf{R})$.

d) Dans cette question, on fixe $n = 2$ et $\Phi(x_1, x_2) = x_1^2 - x_2^2$. Expliciter le groupe $\mathbf{O}(\Phi)$.
On montrera notamment que $\mathbf{O}(Q)$ a quatre composantes connexes dont l'une est

$$\left\{ \begin{bmatrix} \cosh(\theta) & \sinh(\theta) \\ \sinh(\theta) & \cosh(\theta) \end{bmatrix},\ \theta \in \mathbf{R} \right\}.$$

e) Soit $0 < p < n$ un entier et $\Phi(x) = x_1^2 + \cdots + x_p^2 - x_{p+1}^2 - \cdots - x_n^2$. Montrer que l'on a un isomorphisme $\mathbf{O}(Q) \cap \mathbf{O}(n) \cong \mathbf{O}(p) \times \mathbf{O}(n-p)$.