Suites linéaires récurrentes

Soit E un k-espace vectoriel de dimension finie. On note $\mathcal{S}(E)$ l'espace vectoriel des suites $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ **d'éléments de** E.

– Soit σ l'endomorphisme de $\mathcal{S}(E)$ qui à une suite $u = (u_n)$ associe la suite v définie par :

$$\forall n \in \mathbf{N},\ v_n = u_{n+1}.$$

– Pour tout polynôme $P \in k[X]$, on note $P(\sigma)$ le polynôme d'endomorphisme associé.

– Une suite $u = (u_n) \in \mathcal{S}(E)$ est dite **linéaire récurrente** s'il existe un entier $r \geqslant 0$ ainsi que des **scalaires** $q_0, q_1, \ldots, q_{r-1} \in k$ vérifiant :

$$\forall n \in \mathbf{N},\ u_{n+r} + q_{r-1}u_{n+r-1} + \cdots + q_1 u_{n+1} + q_0 u_n = 0.$$

I. Polynôme minimal d'une suite linéaire récurrente

1. — Soit $u \in \mathcal{S}(E)$ une suite.

a) On pose $I_u := \{P \in k[X],\ P(\sigma)(u) = 0\}$. Montrer que I_u est un idéal de $k[X]$.

b) Montrer que la suite u est linéaire récurrente si et seulement si $I_u \neq \{0\}$. Dans ce cas, montrer qu'il existe un *unique* polynôme *unitaire* $\pi_u \in k[X]$ tel que pour tout polynôme $Q \in k[X]$ on ait :

$$Q(\sigma)(u) = 0 \iff \pi_u | Q.$$

Le polynôme π_u ainsi défini s'appelle le **polynôme minimal** de la suite u.

2. — Soit $u \in \mathcal{S}(k^m)$. Pour tout n, on pose $u_n = (u_{1,n}, \ldots, u_{m,n})$.
Montrer que u est linéaire récurrente ssi toutes ses coordonnées $u_i \in \mathcal{S}(\mathbf{R}), 1 \leqslant i \leqslant m$ sont linéaires récurrentes. Comparer les polynômes minimaux π_u et π_{u_i}.

3. — Ici $E = k = \mathbf{C}$. Soit $P = \prod_i (X - \lambda_i)^{\alpha_i} \in \mathbf{C}[X]$ fixé. Montrer que $\ker P(\sigma)$ est de dimension finie et que l'on a

$$\ker P(\sigma) = \bigoplus_i \ker(\sigma - \lambda_i \,\mathrm{id})^{\alpha_i}.$$

Pour i fixé, expliciter une base de $\ker(\sigma - \lambda_i \,\mathrm{id})^{\alpha_i}$.

4. — On étudie dans cette question quelques exemples pour $k = \mathbf{R}$.

a) Montrer que la suite $(2^n + 3^n)$ est linéaire récurrente et calculer son polynôme minimal.

b) Montrer que la suite $(n^2 \cdot 2^n)$ est linéaire récurrente et calculer son polynôme minimal.

c) Montrer que la suite $\begin{bmatrix} 2^n + 3^n \\ n^2 \cdot 2^n \end{bmatrix}$ est linéaire récurrente et calculer son polynôme minimal.

d) La suite $(n!)$ est-elle linéaire récurrente ?

5. — L'ensemble $\mathcal{R}(E)$ des suites linéaires récurrentes est-il un espace vectoriel ?

II. Caractérisation des suites linéaires récurrentes scalaires

Dans toute cette partie, $E = k$. Pour toute suite $u = (u_n) \in \mathcal{S}(k)$, et pour tout entier $m \geqslant 0$, on note $H_m(u)$ la matrice [1] de $\mathcal{M}_{m+1}(k)$ suivante :

$$H_m(u) := [u_{i+j-2}]_{1 \leqslant i,\, j \leqslant m+1}.$$

Le but de cette partie est de caractériser les suites $u \in \mathcal{S}(\mathbf{R})$ qui sont linéaires récurrentes en fonction des valeurs des déterminants $D_m(u) := \text{dét}\ (H_m(u))$.

1. H comme Hermann Hankel, mathématicien allemand (1839 — 1873).

6. — **Un exemple :** Soit $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbf{R})$ la suite définie par :

$$\varphi_0 = 0,\ \varphi_1 = 1 \qquad \text{et} \qquad \forall n \in \mathbf{N},\ \varphi_{n+2} = \varphi_{n+1} + \varphi_n.$$

Calculer $D_m(\varphi)$ pout tout entier $m \geqslant 0$ et déterminer le polynôme minimal π_φ de φ.

7. — Soit u une suite linéaire récurrente de polynôme minimal π_u de degré $d \geqslant 1$. Montrer que pour tout $m \geqslant d$, $D_m(u) = 0$.

Dans toute la suite, $u \in \mathcal{S}(k)$ est une suite pour laquelle il existe un entier $d \geqslant 1$ vérifiant :

$$(\star\star) \qquad D_{d-1}(u) \neq 0 \quad \text{et} \quad \forall m \geqslant d,\ D_m(u) = 0.$$

On se propose de démontrer que u est linéaire récurrente et de donner une méthode de calcul de son polynôme minimal.

8. — Soit donc u vérifiant $(\star\star)$.

a) Quel est le rang de la matrice $H_d(u)$?

b) Démontrer qu'il existe des *uniques* scalaires $q_1, q_2, \dots q_s \in k$ tels que :

$$H_d(u) \cdot \begin{bmatrix} q_d \\ q_{d-1} \\ \vdots \\ q_1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

9. — On reprend les notations de **8.** Pour tout entier $m \geqslant s$, on pose :

$$\lambda_m := u_m + q_1 u_{m-1} + \cdots + q_{d-1} u_{m-d+1} + q_d u_{m-d}.$$

a) Montrer que si $d \leqslant m \leqslant 2d$, alors on a $\lambda_m = 0$.

b) Démontrer que

$$D_{d+1}(u) = \begin{vmatrix} u_0 & u_1 & \dots & u_{d-1} & 0 & 0 \\ u_1 & u_2 & \dots & u_d & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ u_{d-1} & u_d & \dots & u_{2d-2} & 0 & 0 \\ u_d & u_{d+1} & \dots & u_{2d-1} & 0 & \lambda_{2d+1} \\ u_{d+1} & u_{d+2} & \dots & u_{2d} & \lambda_{2d+1} & \lambda_{2d+2} \end{vmatrix}.$$

En déduire que $\lambda_{2d+1} = 0$.

c) Plus généralement, soit $m \geqslant d+1$ pour lequel on a

$$\lambda_d = \lambda_{d+1} = \cdots = \lambda_{2d} = \cdots = \lambda_{m+d-1} = 0.$$

Démontrer, en détaillant les opérations effectuées, que

$$D_m(u) = \begin{vmatrix} u_0 & u_1 & \dots & u_{d-1} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ u_{d-1} & \dots & \dots & u_{2d-2} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ u_d & \dots & \dots & u_{2d-1} & 0 & \dots & 0 & \lambda_{m+d} \\ \vdots & & & \vdots & 0 & \vdots & \iddots & * \\ \vdots & & & \vdots & 0 & \lambda_{m+d} & & \vdots \\ u_m & \dots & \dots & u_{m+d-1} & \lambda_{m+d} & * & \dots & * \end{vmatrix}.$$

En déduire la valeur de λ_{m+d}.

10. — En utilisant les résultats de ***9.***, montrer que la suite u est linéaire récurrente, de polynôme minimal

$$\pi_u = X^d + q_1 X^{d-1} + \cdots + q_{d-1} X + q_d.$$