Corrigé de l'examen du 12 janvier ①

Ex 1 1) Soit λ une vp de A et $E_\lambda = \mathrm{Ker}(A - \lambda I_d)$ l'esp. propre associé.

Si $x \in E_\lambda$, $ABx = BAx = B\lambda x = \lambda Bx$.

Donc $Bx \in E_\lambda$, ie E_λ est stable par B.

2) Notons $D := \begin{bmatrix} \lambda_1 I_{p_1} & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_r I_{p_r} \end{bmatrix}$. D admet $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ comme valeurs propres et les vecteurs de la base canonique forment une base de vecteurs propres.

Soit $B \in M_n(k)$, tq B commute à D. D'après ①, B stabilise les espaces propres de D et est donc de la forme $\begin{pmatrix} M_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & M_r \end{pmatrix}$

Réciproquement, le calcul par blocs montre que toute matrice de cette forme commute à D.

3) On a $e_2 = Ce_1, \dots, e_n = Ce_{n-1} = C^{n-1} e_1$

Comme $(e_1, \dots, e_n)$ est une base de k^n, le vecteur Me_1 se décompose suivant cette base : $Me_1 = \sum_{i=0}^{n-1} b_i e_{i+1}$

$= \left(\sum_{i=0}^{n-1} b_i C^i\right) e_1$.

Soit $M \in M_n(k)$ commutant à C et soit b_i comme précédemment ②

b) Soit $P \in k[X]$ le polynôme $P(X) = \sum_{i=0}^{n-1} b_i X^i$.

On a nécessairement $Me_1 = P(C)(e_1)$, $Me_2 = MCe_1 = CMe_1$
$= [C\,P(C)](e_1) = P(C)(Ce_1)$
$= P(C)\,e_2$

de même et $\forall k$, $Me_k = P(C)e_k$..

Ainsi M et $P(C)$ coïncident sur l'image d'une base de k^n donc sont égales.

4) Soit $A \in M_2(k)$ non scalaire.

Il est classique de voir qu'il existe alors un vecteur $x \neq 0 \in k^2$ qui n'est pas un vecteur propre pour A.

La famille $\{x, Ax\}$ est alors libre et par cardinalité une base de k^2.

Dans cette base, la matrice de l'app lin. associée à A est de la forme $C = \begin{bmatrix} 0 & a_0 \\ 1 & a_1 \end{bmatrix}$, c'est-à-dire compagnon.

ie $\exists P \in Gl_n(k)$, $PAP^{-1} = C$.

Or, on a $\text{Comm}(C) = k[C]$ d'après 3) et

$\text{Comm}(PAP^{-1}) = P\,\text{Comm}(A)\,P^{-1}$

d'où $\text{Comm}(A) = P^{-1}k[C]P = k[P^{-1}CP] = k[A]$.

le pol minimal de A est de degré 2 (≤ 2 par th Cayley Hamilton et ≥ 2 car A non scalaire)

Le morph canonique d'alg $k(X) \longrightarrow k[A]$ a pour noyau

$X \longmapsto A$

$I = (\pi_A)$

On a donc $k[A] \simeq k[X]/_{(\pi_A)}$ qui est de dimension 2,

de base $(\bar{1}, \bar{X})$. (Une base de $k[A]$ est donc (Id, A)).

On a donc $\dim k[A] = 2$.

Ex 2 1) cf cours : $\tilde{\varphi} : E \to E^*$ est un isomorphisme.

$\Leftrightarrow \Phi$ inversible.

2) a)

Soit $x \in \ker \tilde{\varphi}$. On a $\forall y \in E$, $\varphi(x, y) = 0$

En peut pour $y = x$, $\varphi(x,x) = 0 \Rightarrow x = 0$ car φ est définie

b) On a $\det \Phi$ non nul d'après a).

Soit $b_1, \dots, b_n$ une base orthogonale pour φ : $\exists P \in GL_n(k)$,

$${}^tP \Phi P = \begin{pmatrix} \varphi(b_1,b_1) & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \varphi(b_n,b_n) \end{pmatrix}.$$

d'où $\det \Phi \, (\det P)^2 = \underbrace{\varphi(b_1,b_1)}_{>0} \dots \underbrace{\varphi(b_n,b_n)}_{>0}$

d'où $\det \Phi > 0$.

c) $\forall k$, Φ_k est la matrice de la restriction de φ à $\mathrm{vect}(e_1, \dots, e_k)$.

Comme la restriction d'une forme définie positive reste définie positive, b) $\Rightarrow \forall k$ dét $\phi_k > 0$.

3) On procède par récurrence sur n.

$n=1$: $\Phi = [a]$, $a>0$, $\varphi(x,x) = ax^2$ est bien de signature $(1,0)$.

- Supposons avoir démontré l'assertion jusqu'à $n-1$. En part, la restriction de φ à vect $(e_1, \dots, e_{n-1})$ est de signature $(n-1, 0)$ et déf >0 par hyp de récurrence. Comme la signature correspond au dim. maximale d'un sesp. sur lequel la forme est déf >0, la signature de φ est $(n-1, 1)$ ou $(n, 0)$ (φ est non dég. dét $\phi > 0$).

Le signe du discriminant dét Φ d'une forme de signature (p,q) est celui de $(-1)^q$. D'où dét $\phi > 0 \Rightarrow$ sign$(\varphi) = (n, 0)$.

φ est ainsi une somme de n carrés de formes linéaires indépendantes : donc φ est déf >0.

4) On procède de même par récurrence sur n.

- $n=1$ est facile.
- par hyp de récurrence, $\varphi_{|\text{vect}(e_1, \dots e_{n-1})}$ est de signature $(n-1-\tilde{q}, \tilde{q})$ où $\tilde{q}$ est le nbre de chgts de signes dans $s_0, \dots, s_{n-1}$.

On a $s_{n-1} = (-1)^{\tilde{q}}$.

Comme précédemment, la caract de la signature comme dim max sur laquelle la restriction de la forme est définie >0 (resp <0) montre que φ est de signature $(n-\tilde{q}, \tilde{q})$ ou $(n-1-\tilde{q}, \tilde{q}+1)$ et alors $S_n = (-1)^{\tilde{q}}$ ou $S_n = (-1)^{\tilde{q}+1}$.

Dans le 1er cas, S_n et S_{n-1} sont de même signe et $q = \tilde{q}$
dans le 2nd cas, S_n et S_{n-1} sont opposés et $q = \tilde{q}+1$.

Dans tous les cas, φ est bien de signature (n,q).