Corrigé

Exercice I

1) Soit $g \in G$ et $N = |G|$. On a $g^N = e$ par le th de Lagrange donc $\rho(g)^N = Id$ ie $X^N - 1$ annule $\rho(g)$.
Comme $X^N - 1$ est scindé à racines simples sur $\mathbb{C}$, $\rho(g)$ est diagonalisable

2) N est nilpotente ($N^2 = 0$)
Comme $\dim \ker N = 2$, il y a 2 blocs de Jordan.
Comme $N^2 = 0$, on a nécessairement N semblable à $\begin{bmatrix} \begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix} & 0 \\ 0 & \begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix} \end{bmatrix}$.

3) Non : $\forall \varepsilon \neq 0$, la matrice $M_\varepsilon = \begin{bmatrix} 1 & \varepsilon & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & \varepsilon \\ 0 & & & 1 \end{bmatrix}$ est non diagonalisable (car elle admet 1 comme unique vp et que Id est seule dans sa classe de conjugaison)
Comme $M_\varepsilon \underset{\varepsilon \to 0}{\to} Id$, l'ensemble des matrices diagonalisables $\in M_n(\mathbb{C})$ n'est pas ouvert.

4) $M_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & & \\ & 0 & & \\ & & 0 & \\ & & & 0 \end{bmatrix}$ et $M_2 = \begin{bmatrix} \begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ & 0 \end{smallmatrix} & 0 \\ 0 & \begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ & 0 \end{smallmatrix} \end{bmatrix}$ ont même $\chi = X^4$ (elles sont nilpotentes) et même $\pi = X^2$.

Par contre elles ne sont pas semblables : $rg(M_1) = 1$ alors que $rg(M_2) = 2$.

5) $S = \begin{bmatrix} & & 1 \\ & 0 & \vdots \\ 1 & \cdots & 1 \end{bmatrix} \in M_n(\mathbb{R})$ ($n \geq 2$). est manifestement de rang 2.
La forme quadratique associée est $q(x) = x_n^2 + 2\sum_{i=1}^{n-1} x_i x_n$.
La méthode de Gauss donne $q(x) = (x_n + x_1 + \cdots + x_{n-1})^2 - (x_1 + \cdots + x_{n-1})^2$
Donc S est de signature $(1, 1)$.

6) S_1 est définie positive donc en particulier non dégénérée donc S_1 est inversible.

En transposant $S_1 S_1^{-1} = Id$, on obtient ${}^t(S_1^{-1})\,{}^tS_1 = Id$ d'où $({}^t\underset{S_1^{-1}}{\overset{\shortparallel}{S}})^{-1} = {}^t(S_1^{-1})$.

D'où S_1^{-1} est bien encore symétrique.

Enfin les vp de S_1^{-1} sont les inverses de celles de S_1 qui sont toutes >0 car $S_1>0$. Donc S_1^{-1} est aussi définie positive.

Une matrice M est autoadjoint pour S_1^{-1} ssi $\forall X,Y \in \mathbb{R}^n$

$${}^tX S_1^{-1} M Y = {}^tX\,{}^tM S_1^{-1} Y \quad \text{ie ssi } \forall X,Y,\ {}^tX(S_1^{-1}M - {}^tM S_1)Y = 0.$$

La matrice $\Sigma = S_1^{-1}M - {}^tMS_1$ étant symétrique et vérifiant $\forall X,Y$ ${}^tX\Sigma Y = 0$ ceci implique $\Sigma = 0$ (s'il existe Y tq $\Sigma Y \neq 0$, prendre $X = \Sigma Y$ dans $(*)$).

Pour $M = S_1S_2$, $S_1^{-1}(S_1S_2) = S_2$ et ${}^t(S_1S_2)S_1^{-1} = {}^tS_2 = S_2$.

Donc S_1S_2 est bien auto-adjoint pour le produit scalaire S_1^{-1}.

D'après le théorème spectral, S_1S_2 est donc diagonalisable (à valeurs propres réelles).

Exercice II

1) Deux matrices sont équivalentes ssi elles ont même rang.

Or on a $\operatorname{rg}(\Delta(A)) = n + \operatorname{rg}(A)$.
$\operatorname{rg}(\Delta(B)) = n + \operatorname{rg}(B)$

D'où $\Delta(A) \underset{\text{éq}}{\sim} \Delta(B) \Leftrightarrow n+\operatorname{rg}(A) = n+\operatorname{rg}(B) \Leftrightarrow \operatorname{rg}(A) = \operatorname{rg}(B) \Leftrightarrow A \underset{\text{éq}}{\sim} B$.

2) $\Rightarrow$) Si $\Delta(A)$ est semblable à $\Delta(B)$, alors $\Delta(A)^2 = \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & A \end{bmatrix}$ est semblable à $\Delta(B)^2 = \begin{bmatrix} B & 0 \\ 0 & B \end{bmatrix}$.

Par le théorème de Jordan, ces deux matrices doivent avoir pour chaque $\lambda \in \mathbb{C}$, même nombre de blocs de Jordan de même taille.

Or, la réduction de Jordan de $\begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & A \end{bmatrix}$ a 2 fois plus de blocs de Jordan que celle de A pour chaque taille et chaque vp λ.
Idem pour $\begin{bmatrix} B & 0 \\ 0 & B \end{bmatrix}$.

Ainsi $\begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & A \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} B & 0 \\ 0 & B \end{bmatrix} \Rightarrow$ A et B ont même réduction de Jordan
$\Rightarrow A \sim B$.

$\Leftarrow$ Réciproquement, si A et B sont semblables, $\exists P \in GL_n(\mathbb{C})$,
$B = P^{-1}AP$.

Alors $\begin{bmatrix} P & 0 \\ 0 & P \end{bmatrix} \in GL_{2n}(\mathbb{C})$ et on a $\begin{bmatrix} P^{-1} & 0 \\ 0 & P^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & A \\ Id & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P & 0 \\ 0 & P \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & P^{-1}AP \\ Id & 0 \end{bmatrix}$
$= \Delta(B)$.

Donc $\Delta(A)$ et $\Delta(B)$ sont semblables.

Exercice III

a) La formule de Grassmann : $\dim(V_1+V_2) = \dim V_1 + \dim V_2 - \dim(V_1 \cap V_2)$.

D'où $\dim F \cap (G \cap H) = \dim F + \dim(G \cap H) - \dim(F + (G \cap H))$
$= \dim F + [\dim G + \dim H - \dim(G+H)] - \dim(F + (G \cap H))$.

$G+H$ et $F+(G \cap H)$ sont des sev, donc de dim $\leq n$.

D'où $\dim(F \cap G \cap H) \geq (2n+1) - 2n \geq 1$.

Ainsi $F \cap G \cap H \neq \{0\}$.

1) Soit $x \in E$, $\|x\| = 1$.
Décomposons x dans la base orthonormée $f_1, \dots, f_n$
$$x = \sum_{i=1}^{n} x_i f_i. \quad (x_i \in \mathbb{R}).$$

On a $\|x\|^2 = \sum x_i^2$. (car f_i bon).

et $Ax = \sum \alpha_i x_i f_i$.

D'où $\langle x, Ax\rangle = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i^2 \leq \sum_{i=1}^{n} \alpha_1 x_i^2 = \alpha_1 \|x\|^2 = \alpha_1$.

$\alpha_n = \sum_{i=1}^{n} \alpha_n x_i^2 \leq$

D'où $\alpha_n \leq \langle x, Ax\rangle \leq \alpha_1$.

2) On a $\dim F = n-i+1$, $\dim G = n-j+1$, $\dim H = i+j-1$.
Comme $\dim F + \dim G + \dim H = 2n+1$, d'après 0),
$F\cap G\cap H \neq \{0\}$, Soit ~~x~~ $y \neq 0$ dans $F\cap G\cap H$, $x = \frac{y}{\|y\|}$ est un vecteur unitaire de $F\cap G\cap H$.

3) De même qu'en 1), pour tout $\tilde{x} \in F$, $\|\tilde{x}\|=1$, on a
$\alpha_n \leq \langle \tilde{x}, A\tilde{x}\rangle \leq \alpha_i$ (écrire $x = \sum_{k=i}^{n} x_k b_k$).

De même, pour tout $\tilde{x}$ unitaire dans G, on a $\beta_n \leq \langle \tilde{x}, B\tilde{x}\rangle \leq \beta_j$

et pour tout $\tilde{x}$ unitaire dans H, on a $\gamma_{i+j-1} \leq \langle \tilde{x}, C\tilde{x}\rangle \leq \gamma$,

Comme $x \in F\cap G\cap H$ et est unitaire, on a les 3 inégalités simultanément.

4) $C = A+B$, donc $\gamma_{i+j-1} \leq \langle x, Cx\rangle = \langle x, Ax\rangle + \langle x, Bx\rangle \leq \alpha_i + \beta_j$

D'où $\gamma_{i+j-1} \leq \alpha_i + \beta_j$.