# Espaces vectoriels de dimension finie

***Exercice 1.*** — Pourquoi un sev d'un ev de dimension finie est-il de dimension finie ?

***Exercice 2.*** — **Vrai ou faux ?**
Soient $F \subset E$ des $k$-ev.

- **a)** Si $\mathcal{B}$ est une base de $E$, on peut extraire de $\mathcal{B}$ une base de $F$.
- **b)** Si $\mathcal{F}$ est une famille génératrice de $E$, on peut extraire de $\mathcal{F}$ une famille génératrice de $F$.
- **c)** Une famille libre de vecteurs de $F$ est aussi libre comme famille de vecteurs de $E$.
- **d)** Une famille libre de $\mathbf{Q}^n$ est libre comme famille de $\mathbf{R}^n$.
- **e)** Une famille de $\mathbf{R}^n$ qui n'admet pas de $\mathbf{Q}$-combinaison linéaire non triviale est $\mathbf{R}$-libre.

***Exercice 3.*** — Donner la dimension et une base du sev de $\mathbf{R}^4$ formé des éléments $(x, y, z, t)$ tels que

$$\begin{cases} x + 3y + 4z = 0 \\ 2x + 2y + z = 0 \\ 4y + 7z = 0 \end{cases}$$

***Exercice 4.*** — Donner un exemple de famille de sev $E_i$ qui ne sont pas en somme directe mais tels que pour tous $i \neq j$ on ait $E_i \cap E_j = 0$.

***Exercice 5.*** — Soit $(P_i)_{i\in\mathbf{N}}$ une famille de polynôme à degrés échelonnés, c'est-à-dire telle que pour tout $i$ $\deg P_i = i$. Montrer que la famille $\{P_i\}$ est une base de $k[X]$.

***Exercice 6.*** — [Gourdon, III.2 p.110] Soient $a_1, \ldots, a_n$ des réels deux à deux distincts. Quel est la dimension du sev de l'espace des fonctions réelles engendré par les fonctions $x \mapsto |x - a_i|$ ?

***Exercice 7.*** — Décrire des algorithmes pour :

- **a)** Etant donnée une famille de vecteurs $x_1, \ldots, x_p \in k^n$, en extraire une base de $\mathrm{Vect}\,\{x_1, \ldots, x_p\}$.
- **b)** Compléter une famille libre de vecteurs de $k^n$ en une base.

***Exercice 8.*** — Soient $E_1$ et $E_2$ deux sev de dimension finie d'une ev $E$ (quelconque). Montrer la formule de Grassmann :

$$\dim(E_1 + E_2) = \dim E_1 + \dim E_2 - \dim(E_1 \cap E_2).$$

***Exercice 9.*** — [Gourdon, III.3 p.111] Soient $E$ un $k$–ev de dimension finie et $F$ et $G$ deux sev de $E$. A quelle condition nécessaire et suffisante $F$ et $G$ ont-ils un supplémentaire commun ?

***Exercice 10.*** — Soit $E$ un $k$-espace vectoriel de dimension finie qui est aussi une algèbre intègre. Montrer que $E$ est un corps.

***Exercice 11.*** — Soit $E$ un espace vectoriel de dimension $n$ et $F, G, H$ des sous-espaces tels que $\dim F + \dim G + \dim H \geqslant 2n + 1$. Montrer que $F \cap G \cap H \neq \{0\}$.
[**Indication:** Utiliser la formule de Grassmann.]

***Exercice 12.*** — **Décomposition en éléments simples**
Soient $a_1, \ldots, a_k$ des complexes deux à deux distincts.

- **a)** Montrer que la famille

$$\left\{ \frac{1}{X - a_1}, \frac{1}{(X - a_1)^2}, \ldots, \frac{1}{(X - a_1)^n}, \frac{1}{X - a_2}, \ldots, \frac{1}{(X - a_2)^n}, \ldots, \frac{1}{X - a_k}, \ldots, \frac{1}{(X - a_k)^n} \right\}$$

de $\mathbf{C}(X)$ est libre.

**b)** En déduire le théorème de décomposition en éléments simples dans $\mathbf{C}(X)$.

***Exercice 13.*** — **Fonctions splines**
Soient $x_0 = -\infty, x_{n+1} = +\infty$ et $x_1 < \cdots < x_n$ des réels. Quelle est la dimension de l'espace des fonctions $C^1$ sur $\mathbf{R}$ dont la restriction à chaque intervalle $]x_i; x_{i+1}[$ est un polynôme de degré au plus 2 ?

***Exercice 14.*** — **Suites linéaires récurrentes**
Soit $\mathcal{S}$ l'espace vectoriel des suites complexes. On fixe $k \geqslant 1$ un entier et $\alpha_{k-1}, \dots, \alpha_0$ des complexes et soit alors

$$\mathcal{L} := \{u \in \mathcal{S},\ \forall n \in \mathbf{N},\ u_{n+k} = \alpha_{k-1}u_{n+k-1} + \cdots + \alpha_0 u_n\}.$$

**a)** Montrer que $\mathcal{L}$ est un ev de dimension finie.

**b)** On note $P$ le polynôme $X^k - \alpha_{k-1}X^{k-1} - \cdots - \alpha_0$. A quelle condition une suite géométrique de raison $\theta \in \mathbf{C}$ est-elle dans $\mathcal{L}$ ?

**c)** Soient $n > 0$ un entier et $\theta_1, \dots, \theta_n$ des complexes deux à deux distincts. Montrer que l'ensemble des suites géométriques de raison $\theta_1, \dots, \theta_n$ forme une famille libre de $\mathcal{S}$.

**d)** Lorsque $P$ est scindé à racines simples, en déduire une base explicite de $\mathcal{L}$.

**e)** Ecrire un exercice analogue pour les solutions d'équations différentielles linéaires (à coefficients constants) et le résoudre. Quel est "le" lien entre ces deux exercices ?

***Exercice 15.*** — [Gourdon, II.10 p.94] Soient $k \subset k'$ deux corps commutatifs et $E$ un $k'$–ev.

**a)** Montrer que si $E$ est de dimension finie sur $k'$ et si $k'$ est de dimension finie sur $k$ alors $E$ est de dimension finie sur $k$ et qu'on a $\dim_k E = \dim_k k' \times \dim_{k'} E$.

**b)** Montrer que si $E$ est de dimension finie sur $k$ alors il est de dimension finie sur $k'$ et que si de plus $E \neq \{0\}$ alors $k'$ est de dimension finie sur $k$.

**c)** En déduire qu'il n'existe pas de corps intermédiaire entre $\mathbf{R}$ et $\mathbf{C}$.

**d)** Montrer que si $k$ est un corps fini de caractéristique $p$ alors il existe un entier positif $n$ tel que $|k| = p^n$.
Montrer de plus que si $k \subset k'$ sont deux corps finis, alors ils ont même caractéristique $p$ et qu'il existe des entiers $n$ et $m$ avec $n$ *divisant* $m$ tels que $|k| = p^n$ et $|k'| = p^m$.

***Exercice 16.*** — **Nombres algébriques** [Gourdon, problème II.6 p.89]
Un nombre réel (ou complexe) $x$ est dit *algébrique* s'il existe un polynôme non nul $P$ à *coefficients rationnels* (*i.e.* $P \in \mathbf{Q}[X]$) tel que $P(x) = 0$. Un réel (ou un complexe) $x$ qui n'est pas algébrique est dit *transcendant*.

**a)** Montrer que $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$ et $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ sont des nombres algébriques.

Pour tout réel $x$, on note $\mathbf{Q}[x] := \{R(x), R \in \mathbf{Q}[X]\}$ le sous-anneau de $\mathbf{R}$ engendré par $\mathbf{Q}$ et $x$. C'est en particulier un $\mathbf{Q}$–espace vectoriel.

**b)** Montrer que $x$ est algébrique si et seulement si $\mathbf{Q}[x]$ est de dimension finie.

**c)** Soit $x$ un nombre algébrique et soit $P$ un polynôme non nul annulant $x$ de degré minimal. Montrer que $P$ est irréductible.

**d)** Montrer que $x$ est algébrique si et seulement si $\mathbf{Q}[x]$ est un corps.
Exprimer $\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}$ comme un polynôme en $\sqrt{2} + \sqrt{3}$.

**e)** Soient $x$ et $y$ deux nombres algébriques. Montrer que $\mathbf{Q}[x, y] := \{R(x, y), R \in \mathbf{Q}[X, Y]\}$ est un $\mathbf{Q}$–espace vectoriel de dimension finie et en déduire que l'ensemble des nombres algébriques forme un corps.

**f)** En pratique, étant donné un polynôme $P \neq 0$ tel que $P(x) = 0$ et un polynôme $Q \neq 0$ tel que $Q(y) = 0$, comment trouver un polynôme $R \neq 0$ tel que $R(x + y) = 0$ ?

**g)** Montrer que $\overline{\mathbf{Q}} := \{z \in \mathbf{C},\ z \text{ est algébrique}\}$ est une clôture algébrique de $\mathbf{Q}$.